Guide pour l’estimation de l’incertitude de mesure

Emmanuelle BOUDINET

Emmanuelle.boudinet@list.lu

LIST

5, AVENUE DES Hauts-Fourneaux

L-4362 ESCH-SUR-ALZETTE

Table des matières

1 INTRODUCTION.

Lorsque le résultat d'un mesurage ou d'une grandeur physique est donné, il faut obligatoirement donner une indication quantitative sur la qualité du résultat pour que les personnes qui l'utilisent puissent estimer sa fiabilité.

En l'absence de telle indication, les résultats de mesure ne peuvent pas être comparés, soit entre eux, soit par rapport à des valeurs de référence données dans une spécification ou une norme.

La méthode d'évaluation et d'expression de l'incertitude de mesure doit fournir un intervalle tel qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui peuvent raisonnablement être attribuées au mesurande.

En effet, lorsque la totalité des composantes connues ou soupçonnées de l'erreur a été évaluée et que les corrections ont été appliquées, il subsiste encore une incertitude sur la validité du résultat exprimé, c'est à dire un doute sur la manière dont le résultat de mesure représente correctement la valeur de la grandeur mesurée.

L'incertitude de mesure est un paramètre associé au résultat d'un mesurage qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

Ce paramètre peut être par exemple un écart-type, ou un multiple de celui-ci, ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.

L'incertitude de mesure comprend, en général, plusieurs composantes.

Certaines peuvent être caractérisées par des écarts-types expérimentaux.

Les autres composantes, qui peuvent être aussi caractérisées par des écarts-types, sont évaluées en admettant des lois de probabilités, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

L'incertitude de mesure correspond à une estimation de l'étendue des valeurs dans laquelle se situe la valeur vraie d'une grandeur mesurée ou déterminée à partir d'autres grandeurs.

L'incertitude du résultat d'un mesurage est une estimation de la proximité vraisemblable du résultat et de la meilleure valeur, en accord avec les connaissances disponibles.

L'incertitude de mesure est donc une expression du fait que, pour un mesurande donné et un résultat de mesure donné de ce mesurande, il n'y a pas une valeur, mais un nombre infini de valeurs dispersées autour du résultat, qui sont compatibles avec toutes les observations et les données, avec la connaissance du monde physique et qui peuvent être attribuées au mesurande avec des degrés de crédibilité divers.

2 Définitions

2.1 Mesurande

Le mesurande est une grandeur particulière soumise à un mesurage.

L'expression d'une grandeur physique comprend trois éléments indissociables :

- une valeur numérique
- une incertitude
- une unité.

2.2 Mesurage

L'objectif d'un mesurage consiste à déterminer la valeur **y** du mesurande, c'est à dire la valeur de la grandeur particulière à mesurer.

Par conséquent, un mesurage débute par une définition complète et appropriée du mesurande, de la méthode complète de mesure et de la procédure de mesure.

En général, le résultat d'un mesurage est seulement une approximation ou estimation de la valeur du mesurande et, de ce fait, est seulement complet lorsqu'il est accompagné par une expression de l'incertitude de cette estimation.

L'estimation du mesurande et son incertitude doivent être données sans oublier de préciser les unités utilisées.

Les variations entre les observations répétées sont supposées se produire parce que les grandeurs d'influence qui peuvent affecter le résultat de mesure ne sont pas maintenues parfaitement constantes.

2.3 Justesse

La justesse caractérise l'écart entre la moyenne d'un ensemble de résultats d'essais et la valeur de référence acceptée.

2.4 Fidélité

La fidélité définit l'aptitude d'une méthode à fournir des résultats d'essais très voisins les uns des autres, lorsqu'un même produit est essayé plusieurs fois dans des conditions données d'application de la méthode.

2.5 Erreur

Un mesurage présente, en général, des imperfections qui occasionnent une erreur pour le résultat de mesure. Traditionnellement une erreur possède deux composantes à savoir une composante aléatoire et une composante systématique.

L'erreur aléatoire provient de variations temporelles et spatiales non prévisibles ou stochastiques des grandeurs d'influence.

Il n'est pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure, pourtant elle peut généralement être réduite en augmentant le nombre d'observations.

L'erreur systématique, comme l'erreur aléatoire, ne peut pas être éliminée mais, elle peut souvent être réduite. Si une erreur systématique se produit sur un résultat de mesure à partir d'un effet reconnu d'une grandeur d'influence (effet systématique), l'effet peut être quantifié et s'il est significatif par rapport à l'exactitude requise du mesurage ou un facteur de correction peut être appliqué pour compenser l'effet.

Une supposition importante est qu'après correction l'espérance mathématique de l'erreur, qui provient d'un effet systématique, est nulle.

Après évaluation de l'incertitude d'une correction pour un effet systématique, elle peut être ignorée si sa contribution à l'incertitude type composée du résultat de mesure est insignifiante.

Si la valeur de la correction elle-même est insignifiante par rapport à l'incertitude type composée, elle peut, elle aussi, être ignorée.

3 Concepts fondamentaux

3.1 Estimation de la variance σ^2 de l'erreur aléatoire

3.1.1 Estimation de s par mesurage d'une grandeur

La variance σ^2 de l'erreur aléatoire totale, dans des conditions bien définies, par exemple, des conditions de répétabilité, peut être estimée en répétant les mesurages d'une grandeur x_i dans ces conditions.

Soient $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im}$ les résultats obtenus.

Soit x_{moy} leur moyenne arithmétique.

La variance σ^2 peut être estimée par la quantité :

$$s^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik} - x_{moy}\right)^2$$

Équation 1 : estimation de la variance par une grandeur

L'estimation de σ^2 correspond à m – 1 degrés de liberté.

3.1.2 Estimation de s par mesurage de plusieurs grandeurs

Si plusieurs grandeurs sont mesurées dans les mêmes conditions, par exemple des conditions de répétabilité, les écarts-types σ correspondants, et non leurs estimations, peuvent être supposés égaux.

Les résultats obtenus sur les différentes grandeurs appartiennent à des populations de moyennes différentes mais de variances $\boldsymbol{s^2}$ égales ; $\boldsymbol{s^2}$ est appelée variance intra classe.

De façon générale, la variance intra classe correspond à la variance commune à plusieurs populations dont les moyennes peuvent être différentes.

Soit q le nombre de grandeurs mesurées.

Chacune d'elles est désignée par l'indice j.

A partir des m_j résultats obtenus sur la $j^{ème}$ grandeur, la moyenne $x_{j,moy}$ et l'estimation $\boldsymbol{s_j^2}$ de la variance de cette population peuvent être calculées.

A l'estimation $\boldsymbol{s_j^2}$ sont attachés m_j – 1 degrés de liberté.

$$s_j^2 = \frac{1}{m_j - 1}\sum_{k=1}^{m_j}\left(x_{jk} - x_{j,moy}\right)^2$$

Équation 2 : estimation de la variance de plusieurs grandeurs

La variance intra classe est estimée par :

$$s^2 = \frac{(m_1 - 1)s_1^2 + \cdots + \left(m_q - 1\right)s_q^2}{(m_1 - 1) + \cdots + \left(m_q - 1\right)}$$

Équation 3 : variance intra classe

Si M désigne le nombre total de résultats, alors $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_1 + \ldots + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{q}}$

L'estimation $\boldsymbol{s^2}$ peut s'écrire sous la forme :

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m_1}\left(x_{1k} - x_{1,moy}\right)^2 + \cdots + \sum_{k=1}^{m_q}\left(x_{qk} - x_{q,moy}\right)^2}{M - q}$$

Équation 4 : variance intra classe

Puisqu'il y a dans cette estimation q paramètres, calculés à partir des M résultats, le nombre de degrés de liberté est M – q.

Remarque :

Attention, cette estimation ne doit pas être mise en relation avec la remarque du paragraphe **3.6.2** concernant l'estimation d'une grandeur X_i obtenue à partir de N séries d'observations.

La méthode de calcul est identique, mais les estimations portent sur des grandeurs différentes.

3.2 Recherche et correction des erreurs systématiques

3.2.1 Comparaison des résultats à une valeur de référence

Le meilleur moyen de contrôler la justesse d'une méthode de mesure est d'appliquer cette méthode à une grandeur de référence dont la valeur vraie x_0 est supposée connue.

Sur la grandeur de référence, m mesurages sont effectués.

Soient x_{i1}, ..., x_{im} les résultats obtenus et $x_{i,moy}$ leur moyenne arithmétique.

En général, $x_{i,moy}$ est différent de x_0 et il faut déterminer si cet écart s'explique par la dispersion des mesures ou s'il indique réellement l'existence d'une erreur systématique.

A cette fin, un test statistique appelé test de Student est employé.

De façon générale, soit une population de moyenne μ inconnue estimée par la moyenne arithmétique $x_{i,moy}$ de m observations.

Cette moyenne doit être comparée à une valeur théorique x_0.

Les différentes étapes du test sont les suivantes :

- définition de l'hypothèse à vérifier : $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{x}_0$

  Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, µ peut être inférieure ou supérieure à x0. Le test est dit bilatéral, il serait unilatéral si la seule possibilité était, par exemple, µ inférieure à x0.

- La réponse à la question "$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{x}_0$ est-elle réalisée ?" sera donnée en fonction des résultats expérimentaux.

  Pour vérifier cette hypothèse, il faut choisir une fonction des résultats dont la valeur numérique dépend de la réalisation de l'hypothèse et qui est appelée fonction discriminante du test.

  Pour calculer cette fonction, il faut disposer d'une estimation $\boldsymbol{s^2}$ de la variance des erreurs aléatoires. Celle-ci peut être calculée à partir des m résultats dont $x_{i,moy}$ est la moyenne arithmétique.

  Mais une estimation de variance intra classe peut être utilisée de façon à augmenter le nombre de degré de liberté.

  La fonction discriminante est définie par :

$$t = \frac{\sqrt{m}\left(x_{i,moy} - x_0\right)}{s}$$

Équation 5

Sa valeur probable sera d'autant plus grande en valeur absolue que la moyenne μ de la population, c'est à dire la valeur probable de X, sera écartée de x_0.

La loi de distribution de ***t*** peut être calculée lorsque X est une variable de loi normale.

Dans ce cas, et si l'espérance mathématique de X est x_0, la loi de distribution de ***t*** ne dépend que du nombre de degrés de liberté correspondant à ***s***.

Le degré de liberté est :

ν = m-1 si ***s*** est calculée à partir des m résultats dont $x_{i,moy}$ est la moyenne.

ν = N-q si ***s*** est calculée par l'équation 4 du paragraphe 3.1.2.

Cette loi s'appelle loi de Student à ν degrés de liberté.

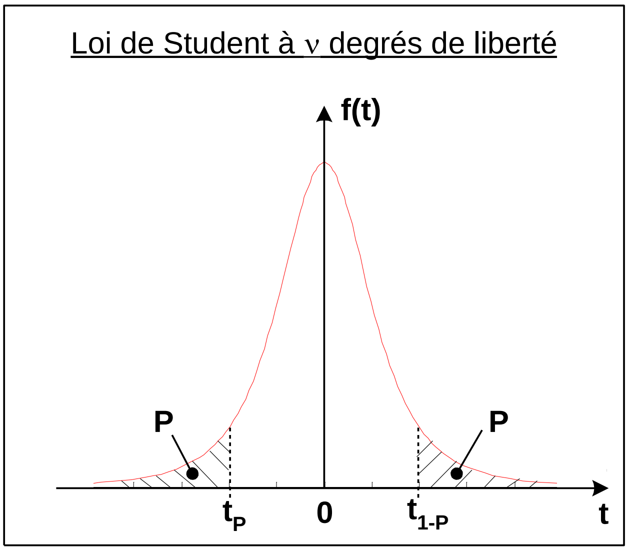


Figure 1 : loi de Student à ν degrés de liberté

Lorsque ν est grand, ***s*** tend vers σ et la variable de Student ***t*** tend vers la variable normale réduite (Voir Figure 2).

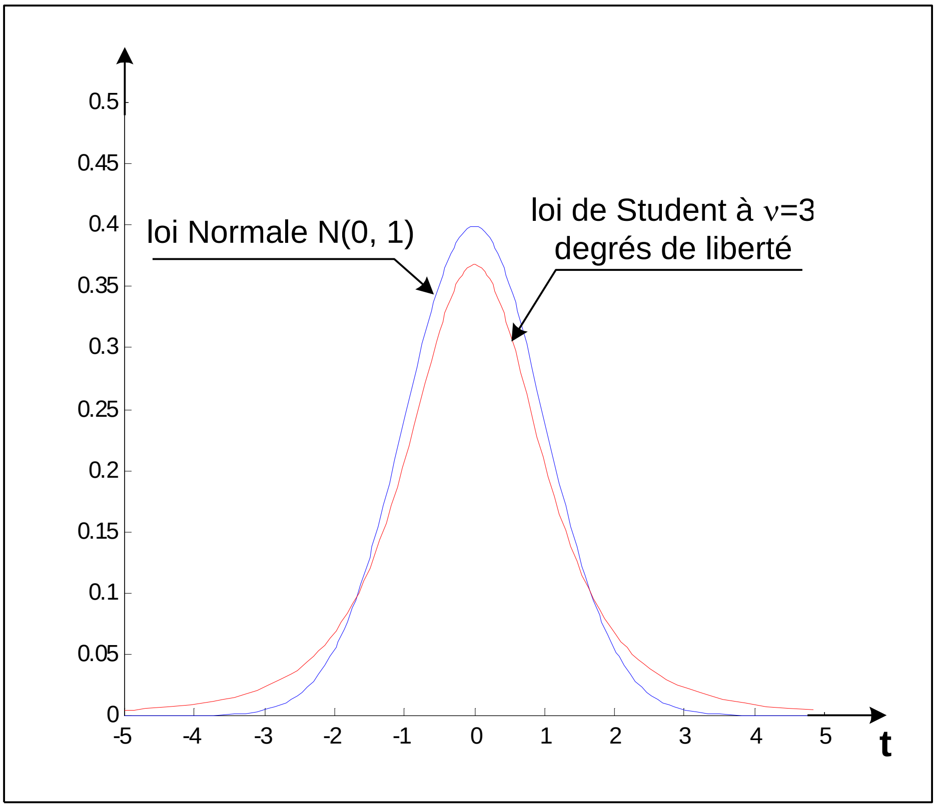


Figure 2 : loi normale / loi de Student

Une table de la loi de Student est donnée par la Table 2 .

- Pour vérifier l'hypothèse $\mu = x_0$, il faut comparer la valeur absolue de ***t*** à un seuil choisi à l'avance.

  L'hypothèse n'est pas vérifiée si **| t |** est supérieur à ce seuil.

  Le risque de première espèce α correspond à la probabilité totale de rejet injustifiée de l'hypothèse. Ce risque est choisi à l'avance, par exemple α est fixé à α = 0.05 (5%) ou α= 0.10 (10%).

  La valeur limite de **| t |** est égale à $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

  L'intervalle $\left[t_{\frac{\alpha}{2}}\ , t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ est le domaine d'acceptation de l'hypothèse.

  L'ensemble des intervalles $\left[-\infty, t_{\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right]$ est le domaine de refus.

  Le test est significatif si la valeur de ***t*** est dans le domaine de refus.

  Dans le cas de comparaison de résultats de mesures à la valeur vraie d'une grandeur de référence, si ***t*** est supérieur à $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, une erreur systématique positive existe et il y a un risque $\frac{\alpha}{2}$ de faire cette conclusion lorsque la méthode est juste.

  Si ***t*** est inférieur à $-t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, une erreur systématique négative existe et le risque de faire cette conclusion lorsque la méthode est juste est encore égale à $\frac{\alpha}{2}$.

- S'il existe réellement une erreur systématique $\varepsilon = \mu - x_0 \neq 0$, par exemple positive, les valeurs de ***t*** seront en moyenne plus élevées que celles qui correspondent à l'absence d'erreur systématique, c'est à dire que la courbe de distribution de ***t*** se déplace vers la droite en se déformant (Voir Figure 3).

  Si les deux courbes se coupent, comme le montre la Figure 3, il y a une probabilité β pour que la valeur absolue de ***t*** soit inférieure à $-t_{1-\alpha/2}$ et dans ce cas, l'absence d'erreur systématique doit être conclue.

  β est appelé risque de deuxième espèce ou risque de non-détection.

  Plus l'erreur systématique est grande, plus les courbes s'éloignent l'une de l'autre et de ce fait, le risque β diminue.

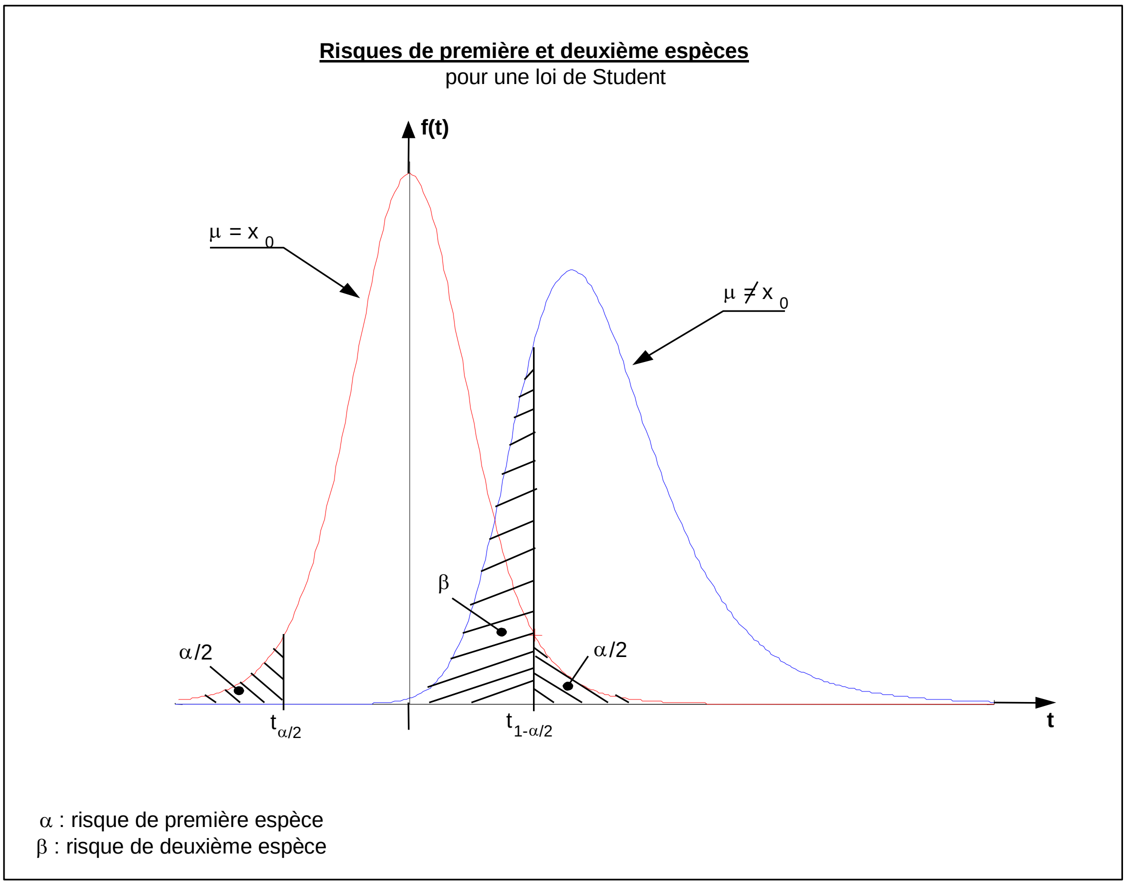


Figure 3 : risques de première et deuxième espèces

Pour α et ν fixés, la courbe donnant β en fonction de $\varepsilon = \mu - x_0 \neq 0$ est tracée. Cette courbe s'appelle courbe d'efficacité.

Pour chaque valeur de ν quand le risque α est fixé, une courbe d'efficacité peut être tracée. (Voir Figure 4).

Ces courbes peuvent être utilisées pour déterminer le nombre de mesures à faire sur la grandeur de référence.

Pour cela, il faut choisir à l'avance une valeur numérique du risque β correspondant à une erreur systématique particulière $\varepsilon = (\text{cste})*\sigma$.

Les courbes d'efficacité sont utilisées et elles correspondent chacune à une valeur de ν fixée et donnent β en fonction du rapport $\lambda = \frac{\varepsilon}{\sigma}$.

Pour déterminer le nombre de mesures, il faut donc rechercher la courbe qui fait correspondre l'une à l'autre les valeurs de β et de λ choisies.

Une fois le nombre de mesures m déterminé, ces m mesures sont effectuées.

En utilisant la moyenne arithmétique $\bar{x}$ des m mesures et l'estimation de l'écart-type s, la valeur t de la fonction discriminante définie par l'intermédiaire de l'Équation 5 est calculée.

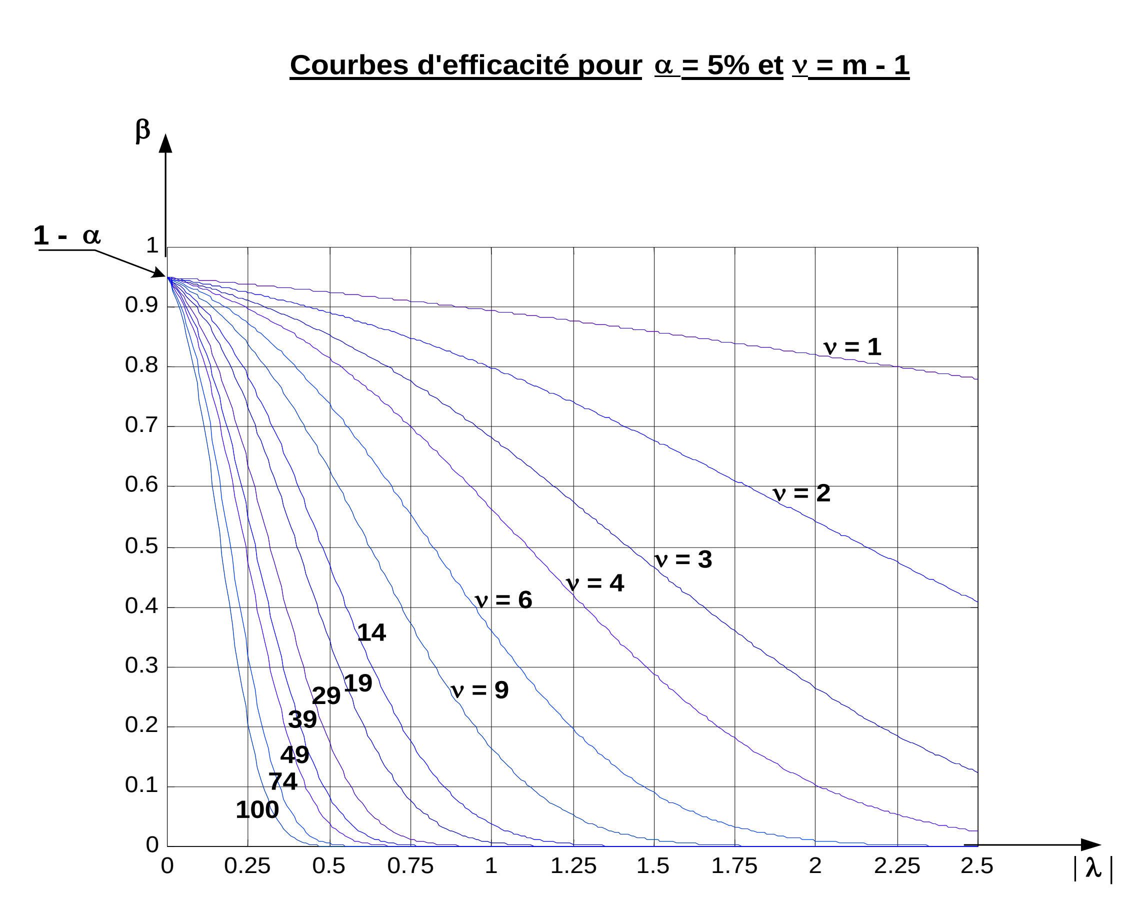


Figure 4 : Courbes d'efficacité

Remarque :

Si la loi de distribution de X n'est pas normale, le test de Student peut être appliqué et seuls les risques α et β sont faiblement modifiés.

3.2.2 Correction de l'erreur systématique

Si le test précédent est significatif, l'erreur systématique est estimée par :

$e = \bar{x} - x_0$ où $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique et x_0 la valeur dite vraie

et les résultats ultérieurs obtenus sur des grandeurs inconnues seront corrigés en soustrayant la valeur ***e*** du résultat.

Cette correction n'est pas parfaite puisque la valeur $\bar{x}$ est entachée d'incertitude.

Il demeure donc une erreur systématique résiduelle inconnue.

Il est admis que cette erreur résiduelle fait partie d'une population de moyenne nulle et de variance égale à celle de $\bar{x}$, c'est à dire égale à : $\sigma_{syst}^2 = \frac{\sigma^2}{m}$

Elle est estimée par : $s_{syst}^2 = \frac{s^2}{m}$

3.3 Incertitude-type

L’incertitude type est l’incertitude du résultat d’un mesurage exprimée sous la forme d’un écart-type.

3.4 Répétabilité

La répétabilité correspond à l’étroitesse de l’accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure.

Ces conditions sont appelées conditions de répétabilité.

Les conditions de répétabilité comprennent :

- Le même mode opératoire,
- Le même observateur,
- Le même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions,
- Le même lieu,
- La répétition durant une courte période de temps.

La répétabilité peut s’exprimer quantitativement à l’aide des caractéristiques de dispersion des résultats.

3.5 Reproductibilité

La reproductibilité correspond à l’étroitesse de l’accord entre les résultats des mesurages du même mesurande, mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure.

Ces conditions sont appelées conditions de reproductibilité.

Les conditions que l’on peut faire varier peuvent comprendre :

- Le principe de mesure,
- La méthode de mesure,
- L’observateur,
- L’instrument de mesure,
- Le lieu,
- La conditions d’utilisation,
- Le temps.

La reproductibilité peut s’exprimer quantitativement à l’aide des caractéristiques de dispersion des résultats.

3.6 Evaluation de Type A (de l'incertitude)

L'évaluation de type A correspond à une méthode d'évaluation de l'incertitude par l'analyse statistique de séries d'observations.

La méthode de Type A est utilisée pour :

- quantifier les incertitudes de répétabilité des résultats des mesurages.
- quantifier les incertitudes de reproductibilité des résultats des mesurages.
- donner une estimation pour une grandeur d'entrée ainsi que son incertitude à partir d'une série de n mesurages.

3.6.1 Répétabilité et reproductibilité

L'incertitude de répétabilité ou de reproductibilité des résultats des mesurages du même mesurande x_i se détermine par le calcul de l'écart-type expérimental noté $s(x_i)$ est défini par :

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - \overline{x_\iota})^2}{n-1}} \quad \text{avec} \quad x_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ik}}{n}$$

où x_{ik} correspondent aux n résultats des mesurages du même mesurande x_i.

L'écart type expérimental caractérise la dispersion des valeurs observées x_{ik} autour de leur moyenne.

Le nombre de degrés de liberté est ν = n-1.

3.6.2 Estimation d'une grandeur Xi

La méthode de Type A pour l'estimation d'une grandeur X_i consiste à réaliser une série de n mesurages x_{i1}, …, x_{in} de la grandeur X_i.

La moyenne arithmétique obtenue par $x_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ik}}{n}$ est utilisée comme estimation x_i de la grandeur X_i.

L'incertitude-type $u(x_i)$ de son estimation est définie par :

$$u(x_i) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - \overline{x_\iota})^2}{n(n-1)}}$$

Le nombre de degrés de liberté de $u^2(x_i)$ est ν = n-1.

Remarques :

- Une estimation de la variance $s^2(x_i)$ effectuée sur un ensemble de K séries d'observations indépendantes de la même grandeur x_i est obtenue à partir de :

  $$s^2(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{K} \nu_i s_i^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{K} \nu_i}$$

  où $s_i^2(x_i)$ est la variance expérimentale de la ième série de n_i observations répétées indépendantes avec un nombre de degrés de liberté $\nu_i = n_i - 1$.

  Le nombre de degrés de liberté de $s^2(x_i)$ est $\nu = \sum_{i=1}^{K} \nu_i$

  Posons $m = \sum_{i=1}^{K} n_i$

  La variance expérimentale $u^2(x_i) = \frac{s^2(x_i)}{m}$ de la moyenne arithmétique de m observations indépendantes caractérisées par l'estimation de la variance ***s²*** établie à partir d'un ensemble de données a aussi ν degrés de liberté.

- Le nombre de degrés de liberté doit toujours être donné lorsque les évaluations de Type A des composantes de l'incertitude-type composée sont fournies.
- Par commodité, $u^2(x_i)$ et $u(x_i)$ évaluées de cette façon sont appelées variance de Type A et incertitude-type de Type A.

3.7 Evaluation de Type B (de l'incertitude)

L'évaluation de type B correspond à une méthode d'évaluation de l'incertitude par des moyens autres que l'analyse statistique de séries d'observations.

3.7.1 Caractéristiques

Les composantes de l'incertitude de type B sont caractérisées par des termes u_i^2 qui peuvent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont l'existence est admise.

- Pour une estimation x_i d'une grandeur d'entrée X_i qui n'a pas été obtenue à partir d'observations répétées, la variance estimée associée $u^2(x_i)$ ou l'incertitude type $u(x_i)$ est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de X_i.
- Les incertitudes déterminées à l'aide de la méthode de Type B sont parfois difficiles à quantifier.

  Elles sont intimement liées à la maîtrise du processus de mesure et à l'expérience de l'opérateur.
- Ces incertitudes peuvent notamment être déterminées à partir :
  - des documentations constructeur,
  - des résultats de mesures antérieurs,
  - l'expérience ou la connaissance générale du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés,
  - des résultat d'étalonnage ou de vérification,
  - des facteurs d'influence (température, pression, hygrométrie…),
  - de l'incertitude assignée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages et manuels.
- Il faut être conscient qu'une évaluation de Type B de l'incertitude type peut être aussi fiable qu'une évaluation de Type A; notamment dans une situation de mesure où une évaluation de Type A est fondée sur un nombre relativement faible d'observations statistiquement indépendantes.
- Par commodité, $u^2(x_i)$ et $u(x_i)$ évaluées de cette façon sont appelées variance de Type B et incertitude-type de Type B.

3.7.2 Sources d'incertitudes associées à des lois de probabilité

3.7.2.1 La résolution d'un indicateur numérique

Si la résolution du dispositif indicateur est δx, la valeur du signal d'entrée qui produit une indication donnée X peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle allant de $X - \delta x/2$ à $X + \delta x/2$.

Le signal d'entrée est alors décrit par une loi de probabilité rectangulaire ou uniforme de largeur δx et de variance $u^2 = \frac{(\delta x)^2}{12}$ entraînant une incertitude-type de $u = \frac{\delta x}{2\sqrt{3}}$ pour toute indication.

Le calcul de la variance d'une loi rectangulaire est effectué au paragraphe **5.1**.

3.7.2.2 La résolution d'un indicateur à aiguille

En ce qui concerne un indicateur numérique à aiguille, il est possible de lire entre deux graduations qui délimitent un échelon.

Raisonnablement, il faut se limiter à la lecture d'une demi-graduation.

En considérant que **a** représente la demi-largeur d'une graduation, c'est à dire un demi échelon, la valeur de la lecture peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle allant de (X – a) à (X + a).

Une loi de probabilité rectangulaire ou uniforme de largeur 2a et de variance est associé :

$u^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{(1\ échelon)^2}{48}$ entraînant de ce fait une incertitude-type de $u = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1\ échelon}{4\sqrt{3}}$

Le calcul de la variance d'une loi rectangulaire est effectué au paragraphe **5.1**.

3.7.2.3 L'hystérésis

L'indication d'un instrument peut différer d'une quantité fixe et connue selon que les lectures successives se font par valeurs croissantes ou décroissantes.

Il faut alors être prudent et prendre note du sens des lectures successives et faire les corrections appropriées.

Ainsi, si la différence maximale entre les valeurs croissantes et décroissantes est δx alors, la loi de probabilité de l'hystérésis d'un instrument de mesure est associée à une loi rectangulaire de largeur δx et de variance $u^2 = \frac{(\delta x)^2}{12}$ entraînant une incertitude-type de $u = \frac{\delta x}{2\sqrt{3}}$.

Le calcul de la variance d'une loi rectangulaire est effectué au paragraphe **5.1**.

3.7.2.4 Un appareil vérifié

Si un appareil a été vérifié et est conforme à une classe, cette classe est définie par une limite +/- a et est associée à une loi rectangulaire ou uniforme de largeur 2a et de variance $u^2 = \frac{a^2}{3}$ entraînant une incertitude-type de $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Le calcul de la variance d'une loi rectangulaire est effectué au paragraphe **5.1**.

3.7.2.5 Un appareil étalonné

Dans le cas d'un appareil étalonné, l'incertitude sur la correction est l'incertitude annoncée dans le certificat d'étalonnage.

Cette incertitude est une incertitude élargie U dont le facteur d'élargissement k est donné.

L'incertitude-type sur la correction d'étalonnage est alors $u = \frac{U}{k}$.

3.7.2.6 L'étendue d'une grandeur

Parfois la seule information à disposition est l'étendue à l'intérieur de laquelle la grandeur X se situe.

Cette étendue est limitée par une valeur minimale x_- et une valeur maximale x_+

Une correction est d'abord effectuée dont la valeur est estimée par :

$$x = \frac{x_- + x_+}{2}$$

Si la loi de probabilité estimée est une loi normale, l'incertitude type sur la correction sera définie par :

$$u = \frac{x_- + x_+}{6}$$

Le calcul de la variance d'une loi normale est effectué au paragraphe **5.3**.

Si la loi de probabilité estimée est une loi rectangulaire, l'incertitude type sur la correction sera définie par :

$$u = \frac{x_- - x_+}{2\sqrt{3}}$$

Le calcul de la variance d'une loi rectangulaire est effectué au paragraphe **5.1**.

3.7.2.7 Une valeur d'entrée d'origine extérieure

Une valeur d'origine extérieure pour une grandeur d'entrée est une valeur qui n'a pas été estimée au cours d'un mesurage donné mais qui a été obtenue par ailleurs comme résultat d'une évaluation indépendante.

Une telle valeur d'origine extérieure est fréquemment accompagnée par des indications sur son incertitude. Celle-ci peut être donnée sous forme d'un écart-type, d'un multiple d'un écart-type, par la demi-largeur d'un intervalle d'un niveau de confiance donné, ou par des limites maximales, ou des limites supérieure et inférieure.

Il peut arriver qu'aucune information ne soit donnée sur l'incertitude. Dans ce cas, il faut employer ces propres connaissances sur l'ordre de grandeur probable de l'incertitude.

Cas particuliers :

- Certains laboratoires d'étalonnage ont adopté en pratique l'expression de l'incertitude sous la forme de limites supérieure et inférieure qui définissent un intervalle ayant un niveau de confiance minimal.

  Ceci est associé au terme d'incertitude "sûre". C'est à dire que volontairement l'incertitude a été élargie pour des raisons de sécurité.

  Par conséquent, si la méthode de détermination de cette incertitude est inconnue, celle-ci ne peut être transformée en incertitude-type; il faut utiliser une évaluation indépendante pour parvenir à la déterminer.

- Certaines incertitudes sont simplement données comme des limites extrêmes entre lesquelles toutes les valeurs de la grandeur sont soi-disant situées.

  La pratique courante est de supposer que toutes les valeurs entre ces limites sont également probables, c'est à dire qu'on associe une loi rectangulaire ou uniforme de largeur 2a.

  Dans ce cas, la variance est $u^2 = \frac{a^2}{3}$ entraînant une incertitude-type de $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

  Le calcul de la variance d'une loi rectangulaire ou uniforme est effectué au paragraphe **5.1**.

  Mais, s'il y a des raisons de croire que les valeurs situées à l'intérieur et au voisinage des limites sont moins probables que celles situées au voisinage du centre de l'intervalle compris entre ces deux limites, une loi normale est alors associée.

  Une loi normale pour laquelle **a** est la demi-largeur de l'intervalle ayant un niveau de confiance de 99,73 % a une variance égale à $u^2 = \frac{a^2}{9}$ entraînant une incertitude-type de $u = \frac{a}{3}$.

  Le calcul de la variance d'une loi normale est effectué au paragraphe **5.3**.

C’est pourquoi, par prudence, dans le cas où des limites extrêmes sont à disposition, une loi triangulaire de largeur 2a dont la variance est $u^2 = \frac{a^2}{6}$ entraînant une incertitude-type de $u = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Le calcul de la variance d’une loi de probabilité triangulaire est effectué au paragraphe 5.2.

3.7.2.8 Valeur d’entrée mesurée

- Si une estimation d’entrée a été obtenue à partir d’une observation unique avec un instrument déterminé qui a été étalonné par rapport à un étalon de faible incertitude, l’incertitude de l’estimation est principalement une incertitude de répétabilité.

  La variance de mesurages répétés avec le même instrument peut avoir été obtenue lors d’une occasion antérieure, non nécessairement à la même valeur précise de lecture mais à une valeur suffisamment proche pour être utilisable et il peut être admis d’en déduire la variance applicable à la valeur d’entrée en question.

  Si une telle information est indisponible, une estimation doit être faite, en prenant pour base la nature de l’appareil ou de l’instrument de mesure, les variances connues d’autres instruments de construction analogue,..

- Tous les instruments de mesure ne sont pas accompagnés par un certificat d’étalonnage ou une courbe d’étalonnage.

  La plupart des instruments sont construits sur la base d’une norme écrite et ils sont vérifiés pour leur conformité à cette norme.

  La norme contient les exigences métrologiques sous la forme d’erreurs maximales admissibles. La conformité de l’instrument à ces exigences est déterminée par comparaison à un instrument de référence dont l’incertitude maximale permise est habituellement spécifiée dans la norme.

  Cette incertitude est alors une composante de l’incertitude de l’instrument vérifié.

  Si aucune information n’est disponible au sujet de la courbe d’erreur caractéristique de l’instrument vérifié, il faut supposer qu’il y a une probabilité égale pour que l’erreur ait n’importe quelle valeur dans les limites permises, c’est à dire qu’une loi de probabilité rectangulaire ou uniforme est associée.

  La variance est alors $u^2 = \frac{a^2}{9}$ entraînant une incertitude-type de $u = \frac{a}{3}$.

  Le calcul de la variance d’une loi rectangulaire ou uniforme est effectué au paragraphe **5.1**.

  Cependant, certains types d’instruments ont des courbes caractéristiques telles que les erreurs sont, par exemple, toujours positives dans une partie de la plage de mesure et négatives dans d’autres parties. Ce genre d’information peut se déduire d’une étude de la norme.

3.8 Incertitude-type composée

'L'incertitude type composée est l'incertitude type du résultat d'un mesurage, lorsque ce résultat est obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs, égale à la racine carrée d'une somme de termes, ces termes étant les variances ou covariances de ces autres grandeurs, pondérées selon la variation du résultat de mesure en fonction de celle de ces grandeurs.' **[2]** (voir Équation 11, page 33)

L'évaluation de l'incertitude dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage.

Les limites d'incertitude doivent comporter au plus deux chiffres significatifs.

Elles sont arrondies, le cas échéant et pour plus de sécurité, l'arrondissage se fait par excès.

3.8.1 Facteur d'élargissement

Le facteur d'élargissement est un facteur numérique utilisé comme multiplicateur de l'incertitude type composée pour obtenir l'incertitude élargie ou globale.

Le choix du facteur d'élargissement k, qui est habituellement compris entre 2 et 3, est fondé sur la probabilité ou le niveau de confiance exigé pour l'intervalle.

Le facteur d'élargissement k doit toujours être donné pour que l'incertitude type de la grandeur mesurée puisse être retrouvée et utilisée dans le calcul de l'incertitude type composée d'autres résultats de mesure qui pourraient dépendre de cette grandeur.

Actuellement, dans tous les certificats d'étalonnage édités à l'entête d'OLAS, le facteur k retenu est 2. Cette valeur est aussi la plus fréquemment rencontrée dans toute l'Europe.

Pour obtenir la valeur du facteur d'élargissement k qui donne un intervalle correspondant à un niveau de confiance spécifié P, il est nécessaire d'avoir une connaissance détaillée de la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure et son incertitude-type composée.

Le tableau qui suit donne en fonction de niveau de confiance P, le facteur d'élargissement k en supposant une loi normale.

Niveau de confiance P %	Facteur d'élargissement k
68.27	1
90	1.645
95	1.96
95.45	2
99	2.576
99.73	3

Table 1 : Facteur d'élargissement

3.8.2 Incertitude élargie

L'incertitude élargie est aussi appelée incertitude globale.

L'incertitude élargie est une grandeur définissant, autour de résultat d'un mesurage , un intervalle, dont celui-ci comprend une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées au mesurande.

L'incertitude élargie est notée U, le résultat d'un mesurage s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{Y = y \pm U}$$

La fraction peut être considérée comme la probabilité ou le niveau de confiance de l'intervalle.

L'association d'un niveau de confiance spécifique à l'intervalle défini par l'incertitude élargie nécessite des hypothèses explicites ou implicites sur la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure et son incertitude-type composée.

Le terme intervalle de confiance a une définition spécifique en statistique et s'applique seulement à l'intervalle défini par U lorsque certaines conditions sont remplies, y compris celle que toutes les composantes de l'incertitude qui contribuent à $u_c(\boldsymbol{y})$ soient obtenues par des évaluations de Type A.

C'est pourquoi, il vaut mieux parler en terme de niveau de confiance.

<u>Remarque : Incertitude lorsque les corrections ne sont pas appliquées à partir d'une courbe d'étalonnage.</u>

Si une correction connue **b** pour un effet systématique n'est pas appliquée au résultat d'un mesurage, elle est prise en compte par un élargissement de l'incertitude attribuée au résultat en remplaçant l'incertitude élargie U par U + b.

Dans de telles situations, le résultat du mesurage est souvent donné sous la forme :

$$Y(t) = y(t) \pm \left[U_{max} + b_{max}\right]$$

où l'indication max. indique que l'on utilise la valeur maximale de U et la valeur maximale de la correction connue b sur l'étendue des valeurs de t.

Au lieu d'utiliser les valeurs maximales de **U** et de **b**, il faut procéder de la manière suivante :

- calculer une correction moyenne $\bar{b}$ en utilisant la formule :

  $\bar{b} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} b(t)dt$ où t_1 et t_2 définissent l'étendue qui nous intéresse pour le paramètre t.

- prendre $\boldsymbol{y}'(t)$ comme meilleure estimation de Y(t) définie par :

  $y'(t) = y(t) + \bar{b}$, où y(t) représente la meilleure estimation non corrigée de Y(t).

- la variance associée à la correction moyenne $\bar{b}$ est donnée par :

$$u^2(\bar{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[b(t) - \bar{b}\right]^2 dt$$

- la variance moyenne de la correction b(t) est donnée par :

$$\overline{u^2\big(b(t)\big)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[u\big(b(t)\big)\right]^2 dt$$

- la variance moyenne de ***y***(t) provenant de toutes les sources d'incertitude autres que la correction b(t) est obtenue à partir de :

$$\overline{u^2(y(t))} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[u(y(t))]^2 dt$$

où $u^2[y(t)]$ est la variance de ***y***(t) due à toutes les sources d'incertitude autres que b(t).

- la valeur unique de l'incertitude type à utiliser pour toutes les estimations du mesurande Y obtenues par : ***y'***(t) = ***y***(t) + $\bar{b}$ est définie par :

$$u_C(y') = \sqrt{\overline{u^2(y(t))} + \overline{u^2(b(t))} + u^2(\bar{b})}$$

Une incertitude élargie U peut être définie en multipliant u_c(***y'***) par un facteur d'élargissement k choisi de manière convenable : U = ku_c(y').

Ce qui donne $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \bar{b} \pm U$

Il faut cependant garder en mémoire que la même correction moyenne a été utilisée pour toutes les valeurs de t et non la correction convenable pour chaque valeur de t.

3.8.3 Méthode permettant de calculer une incertitude élargie

La méthode qui suit permet de déterminer une incertitude élargie $U_p = k_p u_c$(***y***) dans le but de fournir un intervalle $Y = y \pm U_P$ ayant un niveau de confiance approximatif P.

- déterminer ***y*** et u_c(***y***)
- calculer ν_{eff} à partir de la formule suivante

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{u^4(x_i)}{\nu_i}}$$

où u_c est l'incertitude-type composée de ***y***, ν_i est le degré de liberté associé à l'incertitude-type $u(x_i)$

Équation 6 : formule de Welch-Satterthwaite

Si $u(x_i)$ est obtenu par une évaluation de Type A, ν_i est déterminé par ν_i = n-1 si n est le nombre d'observations.

Si $u(x_i)$ est obtenue par une évaluation de Type B, alors $\nu_i \to \infty$.

- déterminer le facteur $t_p(\nu_{eff})$ pour le niveau de confiance désiré P à partir de la Table 1.

  Si ν_{eff} n'est pas entier, interpoler ou faire une troncature de ν_{eff} à l'entier inférieur le plus proche.
- prendre $k_p = t_p(\nu_{eff})$ et calculer $U_p = k_p u_c$(***y***).

Nombre de degrés de liberté ν	Fraction p en %					
	68.27	90	95	95.45	99	99.73
Valeur de $t_p(\nu)$						
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.8
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.6	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.8	2.2	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.2	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.9	3.51
18	1.03	1.73	2.1	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.7	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.7	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.7	3.2
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.66	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

Table 2 : loi de Student

3.8.4 Principales sources d'incertitude dans un mesurage

- Définition incomplète du mesurande.
- Réalisation imparfaite de la définition du mesurande.
- Echantillonnage non représentatif, l'échantillon mesuré peut ne pas représenter le mesurande défini.
- La connaissance insuffisante des effets des conditions d'environnement sur le mesurage ou mesurage imparfait des conditions d'environnement.
- Biais dû à l'observateur pour la lecture des instruments analogiques.
- Résolution finie de l'instrument ou seuil de mobilité.
- Valeurs inexactes des étalons et matériaux de référence.
- Valeurs inexactes des constantes et autres paramètres obtenus de sources extérieures et utilisés dans l'algorithme de traitement des données.
- Approximations et hypothèses introduites dans la procédure de mesure.
- Variations entre les observations répétées du mesurande dans des conditions apparemment identiques.

3.8.5 Valeurs aberrantes

Un résultat est dit aberrant s'il n'obéit pas à la même loi que les autres.

Pour vérifier l'absence de résultats aberrants, il faut faire une hypothèse sur la nature de la loi de probabilité.

Tous les tests classiques supposent que celle-ci est normale; ils peuvent donc, dans certains cas, être considérés comme des tests de normalité.

Soient x_1, x_2, …, x_K une série de K résultats obtenus par mesurage d'une grandeur par la même méthode et classés par valeurs croissantes : $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_K$

L'objet du test est de vérifier si le plus petit x_1 ou le plus grand x_K appartient à la même population que les autres.

3.8.5.1 Cas où la variance σ^2 est connue

L'écart type σ correspondant aux conditions de répétabilité peut être considéré comme pratiquement connu si la méthode est appliquée en routine, ce qui permet d'estimer σ avec une quasi-certitude.

Pour vérifier le caractère aberrant de x_1, il faut calculer :

$$t = \frac{\bar{x} - x_1}{\sigma}$$

Pour vérifier le caractère aberrant de x_N, il faut calculer :

$$t = \frac{x_K - \bar{x}}{\sigma}$$

Voir le Table 3 qui donne en fonction du nombre de résultats K, la valeur t_p telle que ***t*** ait une probabilité P d'être inférieur à t_p quand tous les résultats appartiennent à la même population normale.

	Probabilité	
Nombre de résultats K	**0.95**	**0.99**
3	1.74	2.22
4	1.94	2.43
5	2.08	2.57
6	2.18	2.68
7	2.27	2.76
8	2.33	2.83
9	2.39	2.88
10	2.44	2.93
12	2.52	3.01
14	2.59	3.07
16	2.64	3.12
18	2.69	3.17
20	2.73	3.21

Table 3 : Valeur de t_p en fonction du nombre de résultats K

- Si la valeur expérimentale ***t*** est supérieure à t_p, le test est dit significatif au niveau de confiance P.

  A ce niveau de confiance, l'une des conclusions suivantes peut être adoptée :

  - la valeur suspecte x_1 ou x_K n'appartient pas à la même population que les autres résultats, elle est aberrante.
  - la distribution n'est pas normale.
  - l'écart-type σ été sous-estimé.

  Le risque qu'il n'y ait pas d'anomalie est égal à 1-P.

- Si le test n'est pas significatif ($\boldsymbol{t} < t_p$), la seule conclusion est que l'hypothèse d'appartenance de x_1 ou x_K à la même population normale que les autres résultats n'est pas en contradiction avec les valeurs expérimentales (ce qui ne signifie pas qu'elle soit vérifiée).

3.8.5.2 Cas où la variance σ^2 est inconnue : test de Dixon

Suivant que le résultat aberrant soit x_1 ou x_K, il faut calculer :

- si K est au plus égal à 10
  - pour x_1 aberrant:

$$r_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_K - x_1}$$

  - pour x_K aberrant:

$$r_1 = \frac{x_K - x_{K-1}}{x_K - x_1}$$

- si K est supérieur à 10
  - pour x_1 aberrant:

$$r_2 = \frac{x_3 - x_1}{x_{K-2} - x_1}$$

  - pour x_K aberrant:

$$r_2 = \frac{x_K - x_{K-2}}{x_K - x_3}$$

Emploi de r_1		
	Probabilité	
Nombre de résultats K	0.95	0.99
3	0.941	0.988
4	0.765	0.889
5	0.642	0.780
6	0.560	0.698
7	0.507	0.637
8	0.468	0.590
9	0.437	0.555
10	0.412	0.527
Emploi de r_2		
	Probabilité	
Nombre de résultats K	0.95	0.99
11	0.637	0.745
12	0.600	0.704
13	0.570	0.670
14	0.546	0.641
15	0.525	0.616
16	0.507	0.595
17	0.490	0.577
18	0.475	0.561
19	0.462	0.547
20	0.450	0.535
21	0.440	0.524
22	0.430	0.514
23	0.421	0.505
24	0.413	0.497
25	0.406	0.489
26	0.399	0.486
27	0.393	0.475
28	0.387	0.469
29	0.381	0.463
30	0.376	0.457

Table 4 : Valeur r_{1p} ou r_{2p} en fonction de K

La Table 4 donne, en fonction de K, la valeur r_{1p} ou r_{2p} telle que r_1 ou r_2 ait une probabilité P de lui être inférieur quand tous les résultats appartiennent à la même population normale.

- Si la valeur expérimentale, r_1 ou r_2, est supérieure à la limite donnée par le Tableau 3 pour la probabilité P, le test est dit significatif au niveau de confiance P.

A ce niveau de confiance, l'une des conclusions suivantes peut être adoptée :

  - la valeur suspecte x_1 ou x_K est aberrante.
  - la distribution n'est pas normale.
  - le risque de fausse alarme (probabilité que tous les résultats appartiennent en réalité à la même population normale) est égal à 1-P.

- Si le test n'est pas significatif, la conclusion est que le caractère aberrant de x_1 ou x_K, s'il est réel, n'a pas pu être mis en évidence, faute d'un nombre suffisant d'observations ou d'informations sur la variance.

3.9 Rappels de probabilités et de statistiques

3.9.1 Propriété 1

Soit X une variable aléatoire.

Soient a et b deux constantes.

Alors $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Preuve :

Par définition de la variance :

$$Var(aX + b) = \mathrm{E}[\{(aX + b) - E(aX + b)\}^2]$$

De plus, comme l'espérance est linéaire :

$$Var(aX + b) = \mathrm{E}[\{aX + b - E(aX) - b\}^2]$$

$$Var(aX + b) = \mathrm{E}[\{aX - E(aX)\}^2]$$

$$Var(aX + b) = \mathrm{E}[\{aX - aE(X)\}^2]$$

$$Var(aX + b) = \mathrm{E}\left[\left\{a\big(X - E(X)\big)\right\}^2\right]$$

$$Var(aX + b) = \mathrm{E}\left[a^2\big(X - E(X)\big)^2\right]$$

$$Var(aX + b) = a^2\mathrm{E}\left[\big(X - E(X)\big)^2\right]$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

3.9.2 Propriété 2

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires.

Soient a, b et c trois constantes.

Alors :

$$Var(aX+bY+cZ) = a^2Var(X)+b^2Var(Y)+c^2Var(Z)+2abCov(X,Y)+2acCov(X,Z)+2bcCov(Y,Z)$$

Preuve :

Par définition de la variance :

$$Var(aX+bY+cZ) = E[\{(aX+bY+cZ)-E(aX+bY+cZ)\}^2]$$

L'espérance mathématique étant linéaire :

$$Var(aX+bY+cZ) = E[\{(aX+bY+cZ)-E(aX)-E(bY)-E(cZ)\}^2]$$

$$Var(aX+bY+cZ) = E\left[\left\{\left(aX-E(aX)\right)+\left(bY-E(bY)\right)+\left(cZ-E(cZ)\right)\right\}^2\right]$$

$$Var(aX+bY+cZ) = E\left[\left\{a\left(X-E(X)\right)+b\left(Y-E(Y)\right)+c\left(Z-E(Z)\right)\right\}^2\right]$$

En développant le calcul :

$$\begin{aligned}
&Var(aX+bY+cZ) \\
&\quad = E\left[\left\{\left(a\left(X-E(X)\right)\right)^2+\left(b\left(Y-E(Y)\right)\right)^2+\left(c\left(Z-E(Z)\right)\right)^2\right.\right. \\
&\quad + 2\left[a\left(X-E(X)\right)b\left(Y-E(Y)\right)\right]+2\left[a\left(X-E(X)\right)c\left(Z-E(Z)\right)\right] \\
&\quad \left.\left.+ 2\left[b\left(Y-E(Y)\right)c\left(Z-E(Z)\right)\right]\right\}\right]
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la linéarité de l'espérance mathématique, le calcul devient :

$$\begin{aligned}
&Var(aX+bY+cZ) \\
&\quad = E\left[\left\{a\left(X-E(X)\right)^2\right\}\right]+E\left[\left\{b\left(Y-E(Y)\right)^2\right\}\right]+E\left[\left\{c\left(Z-E(Z)\right)^2\right\}\right] \\
&\quad + E\left[2\left\{a\left(X-E(X)\right)b\left(Y-E(Y)\right)\right\}\right]+E\left[2\left\{a\left(X-E(X)\right)c\left(Z-E(Z)\right)\right\}\right] \\
&\quad + E\left[2\left\{b\left(Y-E(Y)\right)c\left(Z-E(Z)\right)\right\}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Var(aX+bY+cZ) \\
&\quad = E\left[a^2\left(X-E(X)\right)^2\right]+E\left[b^2\left(Y-E(Y)\right)^2\right]+E\left[c^2\left(Z-E(Z)\right)^2\right] \\
&\quad + 2abE\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]+2acE\left[\left(X-E(X)\right)\left(Z-E(Z)\right)\right] \\
&\quad + 2bcE\left[\left(Y-E(Y)\right)\left(Z-E(Z)\right)\right]
\end{aligned}$$

Or la covariance de deux variables aléatoires est définie par :

$$Cov(X,Y) = E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]$$

Ce qui donne alors

$$Var(aX+bY+cZ) = a^2Var(X)+b^2Var(Y)+c^2Var(Z)+2abCov(X,Y)+2acCov(X,Z)+2bcCov(Y,Z)$$

3.9.3 Propriété 3

Soient X, Y, Z et T quatre variables aléatoires.

Soient a, b, c et d quatre constantes.

Alors :

$$Cov(aX + bY, cZ + dT) = acCov(X, Z) + adCov(X, T) + bcCov(Y, Z) + bdCov(Y, T)$$

Preuve :

Par définition de la covariance :

$$Cov(aX + bY, cZ + dT) = E[\{aX + bY - E(aX + bY)\}\{cZ + dT - E(cZ + dT)\}]$$

La linéarité de l'espérance mathématique donne :

$$Cov(aX + bY, cZ + dT) = E[\{aX - E(aX) + bY - E(bY)\}\{cZ - E(cZ) + dT - E(dT)\}]$$

$$Cov(aX + bY, cZ + dT) = E\left[\left\{a\left(X - E(X)\right) + b\left(Y - E(Y)\right)\right\}\left\{c\left(Z - E(Z)\right) + d\left(T - E(T)\right)\right\}\right]$$

$$Cov(aX + bY, cZ + dT) = E\left[\left\{a\left(X - E(X)\right) + b\left(Y - E(Y)\right)\right\}\left\{c\left(Z - E(Z)\right) + d\left(T - E(T)\right)\right\}\right]$$

$$\begin{aligned} Cov(aX + bY, cZ + dT) \\ &= E\left[ac\left(X - E(X)\right)\left(Z - E(Z)\right)\right] + E\left[ad\left(X - E(X)\right)\left(T - E(T)\right)\right] \\ &+ E\left[bc\left(Y - E(Y)\right)\left(Z - E(Z)\right)\right] + E\left[bd\left(Y - E(Y)\right)\left(T - E(T)\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(aX + bY, cZ + dT) \\ &= acE\left[\left(X - E(X)\right)\left(Z - E(Z)\right)\right] + adE\left[\left(X - E(X)\right)\left(T - E(T)\right)\right] \\ &+ bcE\left[\left(Y - E(Y)\right)\left(Z - E(Z)\right)\right] + bdE\left[\left(Y - E(Y)\right)\left(T - E(T)\right)\right] \end{aligned}$$

$$Cov(aX + bY, cZ + dT) = acCov(X, Z) + adCov(X, T) + bcCov(Y, Z) + bdCov(Y, T)$$

3.9.4 Propriété 4

Si une variable aléatoire X est distribuée selon une loi Normale N(μ, σ), alors le moment central d'ordre 4 de X est défini et noté par :

$$\mu_4 = E\left[\left(X - E(X)\right)^4\right] = E[(X - \mu)^4] = 3\sigma^4$$

Preuve :

Par définition du moment central d'ordre 4 :

$$\mu_4 = E[(X - \mu)^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^4 f(x)dx$$

où f(x) correspond à la densité de probabilité de la variable X

Comme la variable X est distribuée selon une loi Normale, la densité de probabilité f(x) est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donc en remplaçant :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^4 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

On effectue un changement de variable en posant :

$$y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow dx = \sqrt{2}\sigma dy$$

Ce qui donne :

$$\mu_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} 4\sigma^4 y^4 e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma dy$$

$$\mu_4 = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^4 e^{-y^2} dy$$

Pour calculer cette intégrale, une intégration par parties est faite en posant :

$$v(x) = y^3 \Rightarrow v'(x) = 3y^2$$

$$w'(x) = ye^{-y^2} \Rightarrow w(x) = -\frac{1}{2} ye^{-y^2}$$

D'où :

$$\mu_4 = \underbrace{\frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} y^3 e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{2} y^2 e^{-y^2} dy$$

$$\mu_4 = \frac{6\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2} dy$$

A nouveau une intégration par parties est faite en posant :

$$v(x) = y \Rightarrow v'(x) = 1$$

$$w'(x) = ye^{-y^2} \Rightarrow w(x) = -\frac{1}{2} ye^{-y^2}$$

Ce qui donne :

$$\mu_4 = \underbrace{\frac{6\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} ye^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{6\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-y^2} dy$$

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_{=\pi}$$

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_{=\sqrt{\pi}}$$

$$\mu_4 = 3\sigma^4$$

3.10 Evaluation de l'incertitude type

Dans de nombreux cas, un mesurande Y n'est pas mesuré directement mais il est déterminé à partir de N autres grandeurs X_1, X_2, …, X_N à travers une relation fonctionnelle f.

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N,)$$

Équation 7 : Relation foncitonnelle

- Les grandeurs d'entrée X_1, X_2, …, X_N dont dépend la grandeur de sortie Y peuvent elles-mêmes être envisagées comme mesurandes et peuvent elles-mêmes dépendre d'autres grandeurs, aboutissant de ce fait à une relation fonctionnelle compliquée f **.**

  L'ensemble des grandeurs d'entrée X_1, X_2, …, X_N peut être caractérisé par :

  - les grandeurs dont les valeurs et les incertitudes sont directement déterminées au cours du mesurage.

    Ces valeurs et incertitudes peuvent être obtenues par exemple, à partir d'une observation unique, ou à partir d'observations répétées, ou par un jugement fondé sur l'expérience. Elles peuvent impliquer la détermination de correction pour les lectures d'instruments et de corrections dues aux grandeurs d'influence telles que la température ambiante, la pression atmosphérique ou l'humidité.

  - les grandeurs dont les valeurs et les incertitudes sont introduites dans le mesurage à partir de sources extérieures, telles que les grandeurs associées à des étalons, à des matériaux de référence certifiés et à des valeurs de référence provenant de la littérature.

- Une estimation du mesurande Y, notée ***y***, est obtenue à partir de l'Équation 7 en utilisant les estimations d'entrée $x_1,\dots x_N$ pour les valeurs des N grandeurs $X_1,\dots,X_N$.

  L'estimation ***y*** peut être obtenue à partir de :

$$y = \bar{Y}$$

$$y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$$

$$y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}\right)$$

  C'est à dire que ***y*** est pris comme la moyenne arithmétique de n déterminations indépendantes Y_k de Y. Cette manière de calculer la moyenne est préférable surtout dans le cas où la fonction f est non linéaire.

- L'écart type estimé associé à l'estimation de sortie ou au résultat de mesure ***y***, appelé incertitude-type composée et noté u_c(***y***), est déterminé à partir de l'écart type estimé associé à chaque estimation d'entrée x_i, appelé incertitude-type et noté u(x_i).
- Chaque estimation d'entrée x_i et son incertitude–type associée u(x_i) sont obtenues à partir d'une loi des valeurs possibles de la grandeur d'entrée X_i.

3.11 Détermination de l'incertitude type composée

L'incertitude type composée de ***y***, où ***y*** est l'estimation du mesurande Y, est obtenue en prenant la racine carrée de la variance composée définie par la loi de propagation des incertitudes que l'on établit ci-après.

Dans le but d'obtenir une expression générale de la loi de propagation des incertitudes, les variables d'entrée X_1, X_2 ,…..X_N sont supposées corrélées.

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 autour des espérances des X_i que l'on note μ_i ($E(X_i)=\mu_i$).

$$y = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)(x_i - \mu_i)$$

$$Var(y) = Var\left(f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)(x_i - \mu_i)\right)$$

Voir paragraphe 3.9.1 Propriété 1

$$Var(y) = Var\left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)(x_i - \mu_i)\right)$$

En appliquant la Propriété 3 du paragraphe 3.9 à l'équation précédente, le calcul devient :

$$Var(y) = Var\left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)(x_i - \mu_i)\right) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} Cov\left(\left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)(x_i - \mu_i), \left(\frac{\delta f}{\delta x_j}\right)(x_j - \mu_j)\right)$$

A nouveau, en utilisant la Propriété 3 du paragraphe 3.9 :

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 Var(x_i - \mu_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)\left(\frac{\delta f}{\delta x_j}\right) Cov\left((x_i - \mu_i), (x_j - \mu_j)\right)$$

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 Var(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)\left(\frac{\delta f}{\delta x_j}\right) Cov(x_i, x_j)$$

Si les variables d'entrée sont indépendantes, alors la covariance entre deux variables est nulle, alors la formule suivante est obtenue :

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 Var(x_i)$$

Équation 8 : Variance de y pour des variables indépendantes

Sinon

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 Var(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)\left(\frac{\delta f}{\delta x_j}\right) Cov(x_i, x_j)$$

Équation 9 : Variance de y

Posons :

$$Var(y) = u_C^2(y)$$
$$Var(x_i) = u^2(x_i)$$
$$Cov(x_i, x_j) = u(x_i, x_j)$$

L'Équation 8 devient :

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 u^2(x_i)}$$

Équation 10 : incertitude-type composée pour des variables indépendantes

L'Équation 9 devient :

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)\left(\frac{\delta f}{\delta x_j}\right) u(x_i, x_j)}$$

Équation 11 : incertitude-type composée

L'Équation 10 et l'Équation 11 expriment la loi de propagation de l'incertitude pour d'une part des variables d'entrée indépendantes et d'autre part des variables d'entrée corrélées.

Les dérivées partielles $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ ont évaluées pour les espérances mathématiques des X_i.

Ces dérivées partielles sont appelées coefficients de sensibilité et décrivent les variations de l'estimation de sortie ***y*** en fonction des variations des valeurs des estimations d'entrée x_1, x_2, …, x_N.

Remarque :

Si le mesurande Y est de la forme

$$Y = cX_1^{p_1}X_2^{p_2}\cdots X_N^{p_N}$$

avec c une constante connue et p_1,…, p_N des exposants connus positifs ou négatifs.

alors l'Équation 10 et l'Équation 11 s'écrivent :

$$\left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i u(x_i)}{x_i}\right)^2$$

Équation 12 : incertitude-type composée relative pour des variables indépendantes

$$\left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i u(x_i)}{x_i}\right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \left(\frac{p_i p_j u(x_i, x_j)}{x_i x_j}\right)^2$$

Équation 13 : incertitude-type composée relative

3.12 Calcul des covariances

La covariance de deux variables aléatoires est une mesure de leur dépendance mutuelle.

Lorsque les grandeurs d'entrée sont corrélées, l'expression convenable pour la loi de propagation de l'incertitude est l'Équation 13.

- Calcul des covariances par estimation du coefficient de corrélation.

  La covariance u(x_i, x_j) peut être estimée en utilisant le coefficient de corrélation qui est définit par :

  $$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \qquad \text{avec } -1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1$$

  Donc $u(x_i, x_j) = u(x_i)\, u(x_j)\, r(x_i, x_j)$

  Une solution pratique sera de faire varier ***r*** pour les valeurs extrêmes qui sont –1, 0 et 1.

  Puis d'observer les variations ainsi engendrées sur l'incertitude type composée de ***y***.

  Par souci de sécurité et de prudence, la valeur de l'incertitude type composée de ***y*** la plus élevée sera retenue.

- Calcul des covariances par estimation des termes de covariances.

  Si deux grandeurs d'entrée X_i et X_j sont corrélées et sont estimées par leur moyenne x_i et x_j à partir des n paires indépendantes d'observations simultanées répétées, alors le terme de covariance est estimé par :

  $$u(x_i, x_j) = s(x_i, x_j)$$

  $$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (X_{i,k} - x_i)(X_{j,k} - x_j)$$

- Calcul des covariances en examinant les termes communs à deux grandeurs d'entrée.

  Supposons que deux grandeurs d'entrée X_i et X_j estimées par x_i et x_j sont définies par deux fonctions G et H de variables non corrélées Q_1, Q_2, …, Q_L .

  C'est à dire que X_i = G(Q_1, Q_2,…, Q_L) et X_j=H(Q_1, Q_2, …, Q_L) avec certaines variables pouvant apparaître seulement dans l'une ou l'autre des fonctions.

  Si la variance associée à l'estimation q_k de Q_k est notée $u^2(q_k)$, alors la covariance peut se calculer par l'expression suivante :

  $$u(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial G}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} u^2(q_k)$$

3.13 Dans le cas de fonctions plus compliquées

3.13.1 Méthode 1

Lorsque la non-linéarité de la fonction f devient significative, il faut établir à nouveau la loi de propagation des incertitudes du paragraphe 3.11.

Cette loi a été établie en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction f et en passant à la variance.

Pour une fonction f dont la non-linéarité est significative, il faudrait pousser le développement de Taylor à un ordre supérieur.

Si un développement de Taylor à l'ordre 3 est effectué, puis il faut passer au calcul de la variance, les calculs vont devenir lourds.

C'est pourquoi, dans le but de simplifier les calculs, il faut faire intervenir des hypothèses simplificatrices.

<u>Hypothèse 1</u>

Les variables d'entrée X_1, ..., X_N sont indépendantes.

$$y = f(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_i - \mu_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) + \frac{1}{6}\sum_{i,j,k=1}^{N} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)(x_k - \mu_k)$$

En supposant les variables d'entrée X_1, ..., X_N indépendantes (Hypothèse 1), la variance est obtenue par la formule suivante :

$$\begin{aligned} Var(y) = & \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 Var(x_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 Var(x_i) Var(x_j) \\ & + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2 \left[E[(x_i - \mu_i)^4] - \left(Var(x_i)\right)^2\right] \\ & + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) E[(x_i - \mu_i)^3] \\ & + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right)^2 Var(x_i) Var(x_j) \\ & + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3}\right) E[(x_i - \mu_i)^4] \end{aligned}$$

Équation 14 : loi de propagation des incertitudes pour des fonctions complexes

Hypothèse 2

Les distributions des variables $X_1, ..., X_N$ sont symétriques autour de leur moyennes.

Cette hypothèse implique que les moments centrés d'ordre impaires $E[(x_i-\mu_i)^{2k+1}]$ sont nuls.

L'Équation 14 devient :

$$\begin{aligned}Var(y) = &\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 Var(x_i)\\ &+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i^2}\right)\right]Var(x_i)Var(x_j)\\ &+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3}\right)\right]E[(x_i-\mu_i)^4]\\ &-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2\left(Var(x_i)\right)^2\end{aligned}$$

Équation 15 : loi de propagation des incertitudes pour des fonctions complexes

Hypothèse 3

Les variables d'entrée $X_1, ..., X_N$ suivent chacune une loi normale.

Cette hypothèse entraîne que :

$E[(x_i - \mu_i)^4] = 3 (Var(x_i))^2$ (Voir Propriété 4 paragraphe 3.9.4)

L'Équation 15 devient :

$$\begin{aligned}Var(y) = &\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 Var(x_i) + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i^2}\right)\right]Var(x_i)Var(x_j)\\ &+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3}\right)\right]\left(Var(x_i)\right)^2\end{aligned}$$

Équation 16 loi de propagation des incertitudes pour des fonctions complexes

Soit encore :

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 Var(x_i) + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i^2}\right)\right]Var(x_i)Var(x_j)$$

Équation 17 loi de propagation des incertitudes pour des fonctions complexes

L'Équation 17 correspond bien à la formule donnée dans le Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure **[2]**.

Il est clair que cette formule est établie en tenant compte d'hypothèses importantes, telles que la normalité des distribution des variables $X_1,...X_N$ et leur indépendance.

L'avantage de cette formule est que le calcul de Var(y) est fait avec plus de précision sous réserve d'une distribution normale pour chaque variable X_i.

Bien sûr, l'expression de l'Équation 15 pourrait être suffisante, mais il faudrait alors estimer le moment centré d'ordre 4, ce qui à priori ne sera pas chose facile.

De plus, il ne faut pas perdre de vue que les hypothèses impliquent les variables d'entrée sont indépendantes.

Pour des variables d'entrée corrélées, l'expression de l'Équation 15 se complique encore plus.

Voici ce que donne la formule :

$$\begin{aligned}
Var(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 Var(x_i) + \sum_{i,j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right)\right] Vax(x_i)Vax(x_j) \\
+ 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) Cov(x_i, x_j) \\
+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right]\left[Cov(x_i x_j, x_k) - \mu_j Cov(x_i, x_j x_k)\right] \\
+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right)\right]\left[Cov(x_i^2, x_j^2) - 2\mu_j Cov(x_i^2, x_j)\right. \\
\left. + 4\mu_i\mu_j Cov(x_i, x_j)\right] \\
+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i,j \neq k,l}}^{N}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)\right]\left[Cov(x_i x_j, x_k x_l) - \mu_j Cov(x_i, x_j x_k)\right. \\
\left. + \mu_i\mu_j Cov(x_k, x_l) + Cov(x_i, x_j)Cov(x_k, x_l)\right] \\
+ \frac{1}{6}\sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i,j \neq k,l}}^{N}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right)\right]\left[Cov(x_i x_j, x_k x_l) - \mu_j Cov(x_i, x_k x_l)\right. \\
\left. + \mu_i\mu_j Cov(x_k, x_l) + Cov(x_i, x_j)Cov(x_k, x_l)\right]
\end{aligned}$$

Les termes de covariance ci-dessus ne sont pas simplement estimables.

Si des fonctions compliquées sont rencontrées, cette formule peut être appliquée, mais cela va donner un résultat compliqué ainsi qu'une probabilité d'avoir une erreur arithmétique très grande lors des dérivations ou lors des applications numériques.

Il vaut mieux choisir une autre méthode dans le cas où les fonctions nécessitent un développement de Taylor à un ordre supérieur à 1.

3.13.2 Méthode 2

Précédemment il a été établi que pour des fonctions compliquées, la formule de propagation des incertitudes devient particulièrement complexe.

Par conséquent, une autre méthode consiste à décomposer la fonction initiale en fonctions élémentaires et de faire les opérations successivement.

Cette procédure permet d'analyser le rôle et la contribution de chaque variable X_i.

Cette analyse par étapes est utile pour élucider les véritables sources d'incertitudes et ainsi prévoir éventuellement des possibilités d'amélioration de l'expérience.

Un exemple va servir d'illustration à cette méthode.

Considérons le mesurande Y exprimé de la façon suivante :

$$Y = \sqrt{X_1 + \frac{X_2}{X_3}}$$

Notons f la fonction définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 + \frac{x_2}{x_3}}$$

Décomposition de la fonction f en fonctions élémentaires en posant:

$$y = \sqrt{z_1}$$ Avec $z_1 = x_1 + z_2$ et $z_2 = \frac{x_2}{x_3}$

Pour chaque formule, en appliquant la loi de propagation des incertitudes du paragraphe 3.11, le calcul devient alors :

$$u_c(y) = \frac{u(z_1)}{\sqrt{z_1}} \qquad u(z_1) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(z_2)} \qquad u(z_2) = \sqrt{\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$$

La probabilité d'erreur dans cette approche est beaucoup plus faible.

3.13.3 Cas de fonctions à croissance ou décroissance “rapides”

Pour des fonctions f(x) à croissance ou décroissance rapide, si l’incertitude de x est connue, le résultat de l’incertitude u(***y***) peut être décomposé en deux parties u_1(***y***) et u_2(***y***) définies par :

$$u_1(y) = \left|f\left(x + u(x)\right) - f(x)\right|$$

$$u_2(y) = \left|f\left(x - u(x)\right) - f(x)\right|$$

La probabilité que la vraie valeur de ***y*** se trouve dans l’intervalle défini par :[$\boldsymbol{y}_{est} - u_1(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y}_{est} + u_2(\boldsymbol{y})$]est de 68% (car le facteur d’élargissement k égal à 1 voir Table 1)

Cette approche est approximative reste valable si x n’est pas très grand par rapport à u(x) et n’est correcte que si les incertitudes restent petites.

3.14 Evaluation des composantes de l’incertitude

Lors du calcul de l’incertitude de mesure, tout le problème est d’identifier la totalité des paramètres x_1, x_2,..., x_N qui ont une incidence sur le résultat du mesurage et de quantifier leur incertitude-type.

Pour évaluer la valeur numérique des incertitudes-types associées à chacune des composantes de l’incertitude, deux méthodes peuvent être employées:

- méthode de Type A qui se fonde sur l’application de la statistique. Elle est principalement utilisée pour quantifier les incertitudes de répétabilité de mesurage.
- méthode de Type B qui recouvre tout ce qui n’est pas statistique tel que les spécifications du constructeur, les certificats d’étalonnage, les facteurs d’influences…

L’objectif de la classification en Type A et en Type B est d’indiquer les deux différentes manières d’évaluer les composantes de l’incertitude.

Elle n’a pour but que de clarifier la présentation; cette classification ne signifie pas qu’il existe une différence quelconque de nature entre les composantes résultant des deux types d’évaluation.

Les deux types d’évaluation sont fondés sur des lois de probabilités et les composantes de l’incertitude résultant de l’un comme de l’autre type sont quantifiées par des variances ou des écarts-types.

Une composante de l’incertitude obtenue par évaluation de Type A est calculée à partir d’une série d’observations répétées et est la variance habituelle estimée statistiquement.

L’écart-type estimé est appelé incertitude-type de Type A.

Une composante de l’incertitude obtenue par évaluation de Type B est évaluée par utilisation des connaissances disponibles et l’écart-type estimé est appelé incertitude-type de Type B.

3.15 Mesurande de plusieurs composantes

Si à l'aide de N variables d'entrée $x_1, ..., x_N$, au travers des relations générales expriment k variables de sortie $\boldsymbol{y}_1,....,\boldsymbol{y}_k$ une formulation généralisée peut être établie pour la covariance entre les variables $\boldsymbol{y}_1,....,\boldsymbol{y}_k$.

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{y}_1 = f_1(x_1, ..., x_N)$$

$$\boldsymbol{y}_2 = f_2(x_1, ..., x_N)$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{y}_k = f_k(x_1, ..., x_N)$$

Une relation entre les matrices de covariance des variables $x_1,....,x_N$ et des variables $\boldsymbol{y}_1,...,\boldsymbol{y}_k$ va être définie

La matrice de covariance des variables $x_1,...,x_N$ s'écrit :

$$Cov(X) = \begin{pmatrix} cov(x_1,x_1) & cov(x_1,x_2) & \cdots & cov(x_1,x_N) \\ cov(x_2,x_1) & cov(x_2,x_2) & & cov(x_2,x_N) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ cov(x_1,x_1) & cov(x_1,x_1) & \cdots & cov(x_1,x_1) \end{pmatrix}$$

La diagonale de la matrice Cov(X), correspond aux variances des variables $x_1, ..., x_N$.

La matrice du Jacobien de la transformation des variables $x_1, ..., x_N$ en les variables $\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_k$ est introduite

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

La matrice de covariances des variables $\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_k$ s'écrit :

$$Cov(Y) = JCov(X)J^t$$

De même, la diagonale correspondra à la variance des variables $\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_k$.

3.16 Expression de l'incertitude

3.16.1 Conseils généraux

- Lorsqu'un mesurage est effectué, toute l'information nécessaire pour la réévaluation de celui-ci doit être disponible pour ceux qui pourraient en avoir besoin.

  L'information nécessaire pourra être disponible sous la forme de rapports publiés, de système d'étalonnage ou d'essais, de spécifications d'essais, de certificats d'étalonnage et d'essais, de manuels d'instructions, de normes internationales ou nationales et de réglementations locales.

- Lorsque les détails d'un mesurage sont fournis, y compris la façon d'évaluer l'incertitude du résultat par référence à des documents publiés, il faut tenir à jour ces documents afin qu'ils soient compatibles avec la procédure réellement utilisée.

- Lorsqu'un résultat de mesure est exprimé avec son incertitude, il faut se concentrer sur toutes les informations qui pourraient être utiles.

  C'est à dire qu'il faut :

  - décrire clairement les méthodes utilisées pour calculer le résultat de mesure et son incertitude à partir des observations expérimentales et des données d'entrée.
  - faire la liste de toutes les composantes de l'incertitude et documenter complètement la manière dont elles ont été évaluées.
  - présenter l'analyse des résultats de telle façon que chacune de ses étapes importantes puisse être suivie facilement et que le calcul du résultat fourni puisse être répété de manière indépendante si nécessaire.
  - donner toutes les corrections et les constantes utilisées pour l'analyse, ainsi que leurs sources.

  Il faut fournir assez d'informations, de façon suffisamment claire, pour que le résultat puisse être remis à jour ultérieurement si une information ou des données nouvelles devenaient disponibles.

3.16.2 Conseils spécifiques

- Lorsque le résultat d'un mesurage est exprimé et que la mesure de l'incertitude est l'incertitude type composée u_c ($\boldsymbol{y}$), il faut :

  - décrire complètement la manière dont le mesurande Y est défini.
  - donner l'estimation ***y*** du mesurande Y et son incertitude-type composée $u_c(\boldsymbol{y})$ ainsi que les unités utilisées pour ***y*** et $u_c(\boldsymbol{y})$.
  - donner la valeur de chaque estimation d'entrée x_i et de son incertitude-type $u(x_i)$ en décrivant comment elles ont été obtenues.
  - donner les covariances estimées ou les coefficients de corrélation estimés associés à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées et donner les méthodes utilisées pour les obtenir.
  - donner les degrés de liberté pour l'incertitude type de chaque estimation d'entrée et la manière dont ils sont obtenus.

- Lorsque le résultat numérique du mesurage est donné avec son incertitude-type composée $u_c(\boldsymbol{y})$, il est préférable d'énoncer le résultat de l'une des quatre manières suivantes pour éviter toute fausse interprétation.
    - ***y*** = … (unité) avec une incertitude-type composée u_c = … (unité)
    - ***y*** = …,..(…)unité où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de l'incertitude type composée u_c qui porte sur les deux derniers chiffres du résultat fourni.
    - ***y*** = …,…(…,…) unité où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de l'incertitude type composée u_c exprimée avec l'unité du résultat fourni.
    - ***y*** = (…,… +/- …,….) unité où le nombre qui suit le symbole +/- est la valeur numérique de l'incertitude type composée u_c.

  Remarque : la forme +/- doit être évitée à chaque fois que possible parce qu'elle est traditionnellement utilisée pour indiquer un intervalle correspondant à un niveau de confiance et peut, de ce fait, être confondue avec l'incertitude élargie.

- Lorsqu le résultat numérique du mesurage est donné avec son incertitude élargie U, il est préférable d'énoncer le résultat comme suit :

  y = (…,…+/- …,…) unité, où le nombre qui suit le symbole +/- est la valeur numérique de l'incertitude élargie U = ku_c, avec U déterminée à partir de l'incertitude type composée u_c=…,… unité et du facteur d'élargissement k = …

- Si un mesurage détermine simultanément plus d'un mesurande, c'est à dire s'il fournit deux ou plusieurs estimations $\boldsymbol{y}_i$ à partir de variables d'entrée x_i communes, il faut alors donner en plus des $\boldsymbol{y}_i$ et $u_c(\boldsymbol{y}_i)$, les éléments $u(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j)$ de la matrice de covariance ou les éléments $r(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j)$ de la matrice des coefficients de corrélation.

- Les valeurs numériques de l'estimation de ***y*** et de son incertitude-type composée ou de son incertitude élargie ne doivent pas être données avec un nombre excessif de chiffres.

  Habituellement, les valeurs de u_c et U sont données avec deux chiffres significatifs.

  Mais, lors du calcul, il faut éviter de faire des arrondis qui peuvent provoquer la propagation des erreurs d'arrondissage dans les calculs.

  De plus, concernant le coefficient de corrélation, il est recommandé de le donner avec trois chiffres significatifs si sa valeur absolue est proche de 1.

4 Récapitulatif de la procédure d'évaluation et d'expression de l'incertitude

4.1 Etape 1

Exprimer mathématiquement la relation entre le mesurande Y et les grandeurs d'entrée X_i dont Y dépend :

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N).$$

La fonction f doit contenir chaque grandeur, y compris toutes les corrections et facteurs de correction qui peuvent contribuer à une composante significative de l'incertitude du résultat du mesurage.

4.2 Etape 2

Déterminer x_i, la valeur estimée de la grandeur d'entrée X_i, soit sur la base de l'analyse statistique de séries d'observations, soit par d'autres moyens.

4.3 Etape 3

Evaluer l'incertitude-type $u(x_i)$ de chaque estimation x_i.

Pour une estimation d'entrée obtenue par l'analyse statistique de séries d'observations, l'incertitude-type est évaluée par la méthode de Type A.(voir paragraphe 3.6)

Pour une estimation d'entrée obtenue par d'autres moyens, l'incertitude-type $u(x_i)$ est évaluée par la méthode de Type B (voir paragraphe 3.7)

4.4 Etape 4

Evaluer les covariances associées à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées.

(voir paragraphe 3.12)

4.5 Etape 5

Calculer le résultat de mesurage, c'est à dire l'estimation $\boldsymbol{y}$ du mesurande Y, à partir de la relation fonctionnelle f en utilisant pour les grandeurs d'entrée X_i les estimations x_i obtenues par l'étape 2.

4.6 Etape 6

Déterminer l'incertitude type composée $u_c(\boldsymbol{y})$ du résultat de mesure $\boldsymbol{y}$ à partir des incertitudes-types et des covariances associées aux estimations d'entrée, comme expliqué aux paragraphes 3.11 et 3.12.

Si le mesurage détermine simultanément plusieurs grandeurs de sortie, calculer leurs covariances.

4.7 Etape 7

Si une incertitude élargie est donnée avec pour objectif de fournir un intervalle de $\boldsymbol{y} - U$ à $\boldsymbol{y} + U$ pour que celui-ci comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs que pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande Y, multiplier l'incertitude type composée $u_c(\boldsymbol{y})$ par un facteur d'élargissement k (voir paragraphe 3.8.1 ou paragraphe 3.8.3), situé en général dans la plage de 2 à 3, pour obtenir $U = ku_c(\boldsymbol{y})$.

4.8 Etape 8

Donner dans un rapport le résultat du mesurage $\boldsymbol{y}$ avec son incertitude-type composée $u_c(\boldsymbol{y})$ ou son incertitude élargie U en suivant les indications données au paragraphe 3.16 et utiliser un des modes d'expression recommandés.

Décrire, comment les valeurs de $\boldsymbol{y}$, de $u_c(\boldsymbol{y})$ et de U ont été obtenues.

5 Lois usuelles pour le calcul de l'incertitude

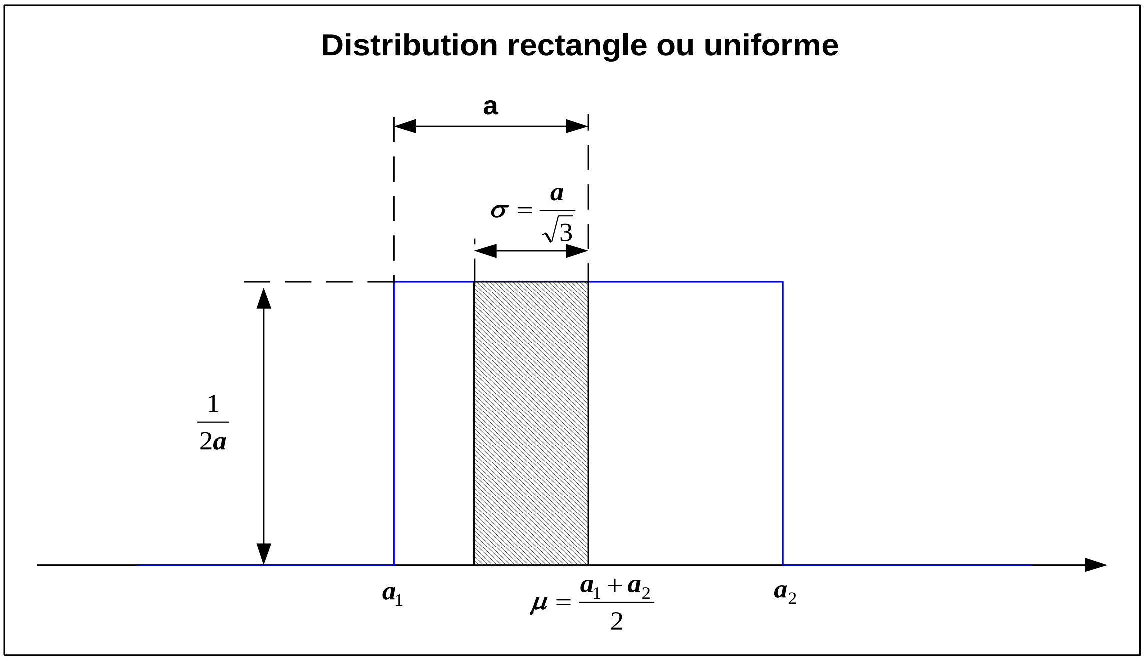
5.1 Loi rectangulaire ou uniforme

Supposons que X soit décrit par une loi de probabilité rectangulaire de limite inférieure a_1 et de limite supérieure a_2, avec une demi-largeur égale à $a = (a_2 – a_1) / 2$

La densité de probabilité de X est alors :

$$p(X) = \frac{1}{a_2 - a_1} \; pour \; a_1 \le X \le a_2$$

$$p(X) = 0 \; pour \; X < a_1 \, ou \, X > a_2$$



Par définition de la variance : Var(X) = E[(X – E(X))^2] = E (X^2) – [E(X)]^2

Calculons E(X)

$$E(X) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{x}{a_2 - a_1} dx$$

$$E(X) = \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} x dx$$

$$E(X) = \frac{1}{a_2 - a_1} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{a_1}^{a_2}$$

$$E(X) = \frac{1}{2} \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 - a_1}$$

$$E(X) = \frac{a_2 + a_1}{2}$$

Calculons E(X^2)

$$E(X^2) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{x^2}{a_2 - a_1} dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} x^2 dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{a_2 - a_1} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{a_1}^{a_2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \frac{a_2^3 - a_1^3}{a_2 - a_1}$$

$$E(X^2) = \frac{a_2^2 + a_1^2 + a_1 a_2}{3}$$

La variance Var(X) peut être calculée :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \frac{a_2^2 + a_1^2 + a_1 a_2}{3} - \left[\frac{a_2 + a_1}{2}\right]^2$$

$$Var(X) = \left[\frac{a_2 - a_1}{2\sqrt{3}}\right]^2$$

$$Var(X) = \left[\frac{a}{\sqrt{3}}\right]^2$$

Donc l'écart-type est :

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

5.2 Loi triangulaire

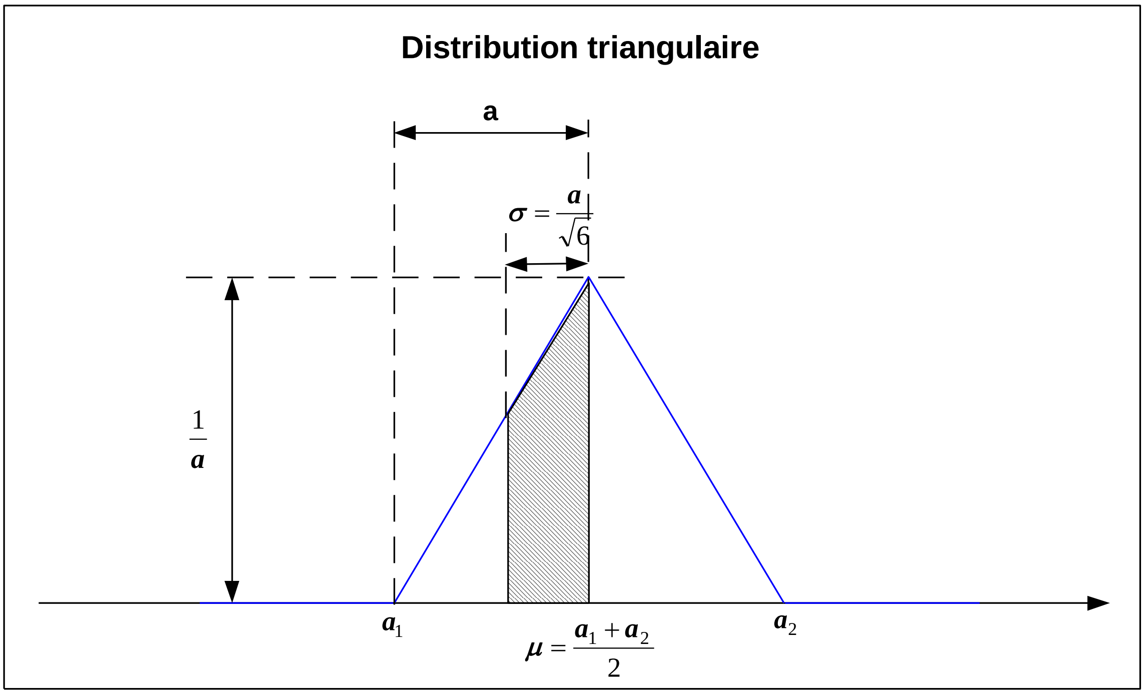
Supposons que X soit décrit par une loi de probabilité triangulaire de limite inférieure a_1 et de limite supérieure a_2, avec une demi-largeur égale à a = ($a_2 - a_1$) / 2

La densité de probabilité de X est alors :

$$p(X) = 4\frac{X - a_1}{(a_2 - a_1)^2} \ pour \ a_1 \leq X \leq \frac{a_2 + a_1}{2}$$

$$p(X) = 4\frac{a_2 - X}{(a_2 - a_1)^2} \ pour \ \frac{a_2 + a_1}{2} \leq X \leq a_2$$

$$p(X) = 0 \ pour \ X < a_1 \, ou \, X > a_2$$



Par définition de la variance : Var(X) = E[(X – E(X))^2] = E (X^2) – [E(X)]^2

Calculons E(X)

$$E(X) = \frac{4}{(a_2 - a_1)^2}\left[\int_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} x(x - a_1)dx + \int_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} x(a_2 - x)dx\right]$$

Pour les deux intégrales une intégration par parties est effectuée, en posant :

$u_1(x) = x - a_1$ et $\quad v_1'(x) = x$

$u_2(x) = a_2 - x$ et $\quad v_2'(x) = x$

Donc

$u_1'(x) = 1$ et $\quad v_1 (x) = (1/2)x^2$

$u_2'(x) = -1$ et $\quad v_2(x) = (1/2)x^2$

Ce qui donne:

$$E(X) = \frac{4}{(a_2-a_1)^2}\left[\left[\frac{1}{2}x^2(x-a_1)\right]_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} - \int_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} \frac{1}{2}x^2dx + \left[\frac{1}{2}x^2(a_2-x)\right]_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} + \int_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} \frac{1}{2}x^2dx\right]$$

$$E(X) = \frac{4}{(a_2-a_1)^2}\left[\left[\frac{1}{2}x^2(x-a_1)\right]_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} - \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} + \left[\frac{1}{2}x^2(a_2-x)\right]_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} + \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2}\right]$$

$$E(X) = \frac{4}{(a_2-a_1)^2}\left[\frac{1}{6}(a_1^3+a_2^3) - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\right]$$

$$E(X) = \frac{1}{2(a_2-a_1)^2}[a_1^3+a_2^3-a_1^2a_2-a_2a_2^2]$$

$$E(X) = \frac{1}{2(a_2-a_1)^2}[a_2^2(a_2-a_1)-a_1^2(a_2-a_1)]$$

$$E(X) = \frac{1}{2(a_2-a_1)^2}[(a_2^2-a_1^2)(a_2-a_1)]$$

$$E(X) = \frac{1}{2(a_2-a_1)^2}[(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)]$$

$$E(X) = \frac{(a_2+a_1)}{2}$$

Calculons E(X^2)

$$E(X^2) = \frac{4}{(a_2-a_1)^2}\left[\int_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} x^2(x-a_1)dx + \int_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} x^2(a_2-x)dx\right]$$

Pour les deux intégrales une intégration par parties est effectuée, en posant :

$u_1(x) = x – a_1$ et $v_1'(x) = x^2$

$u_2(x) = a_2 – x$ et $v_2'(x) = x^2$

Donc

$u_1'(x) = 1$ et $v_1 (x) = (1/3)x^3$

$u_2'(x) = -1$ et $v_2 (x) = (1/3)x^3$

Ce qui donne:

$$E(X^2) = \frac{4}{(a_2-a_1)^2}\left[\left[\frac{1}{3}x^3(x-a_1)\right]_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} - \int_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} \frac{1}{3}x^3dx + \left[\frac{1}{3}x^3(a_2-x)\right]_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} + \int_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} x^3dx\right]$$

$$E(X^2) = \frac{4}{(a_2-a_1)^2}\left[\left[\frac{1}{3}x^3(x-a_1)\right]_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} - \left[\frac{1}{12}x^4\right]_{a_1}^{\frac{a_2+a_1}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3(a_2-x)\right]_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2} + \left[\frac{1}{12}x^4\right]_{\frac{a_2+a_1}{2}}^{a_2}\right]$$

$$E(X^2) = \frac{4}{(a_2-a_1)^2}\left[\frac{1}{12}(a_1^4+a_2^4) - \frac{1}{6}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^4\right]$$

$$E(X^2) = \frac{1}{24(a_2-a_1)^2}[4(a_2-a_1)(a_2^3-a_1^3)+3(a_1^2-a_2^2)^2]$$

$$E(X^2) = \frac{1}{24(a_2-a_1)^2}[4(a_2-a_1)(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)+3(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2]$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)+\frac{1}{8}(a_2+a_1)^2$$

La variance Var(X) peut être calculée :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)+\frac{1}{8}(a_2+a_1)^2 - \left(\frac{a_2+a_1}{2}\right)^2$$

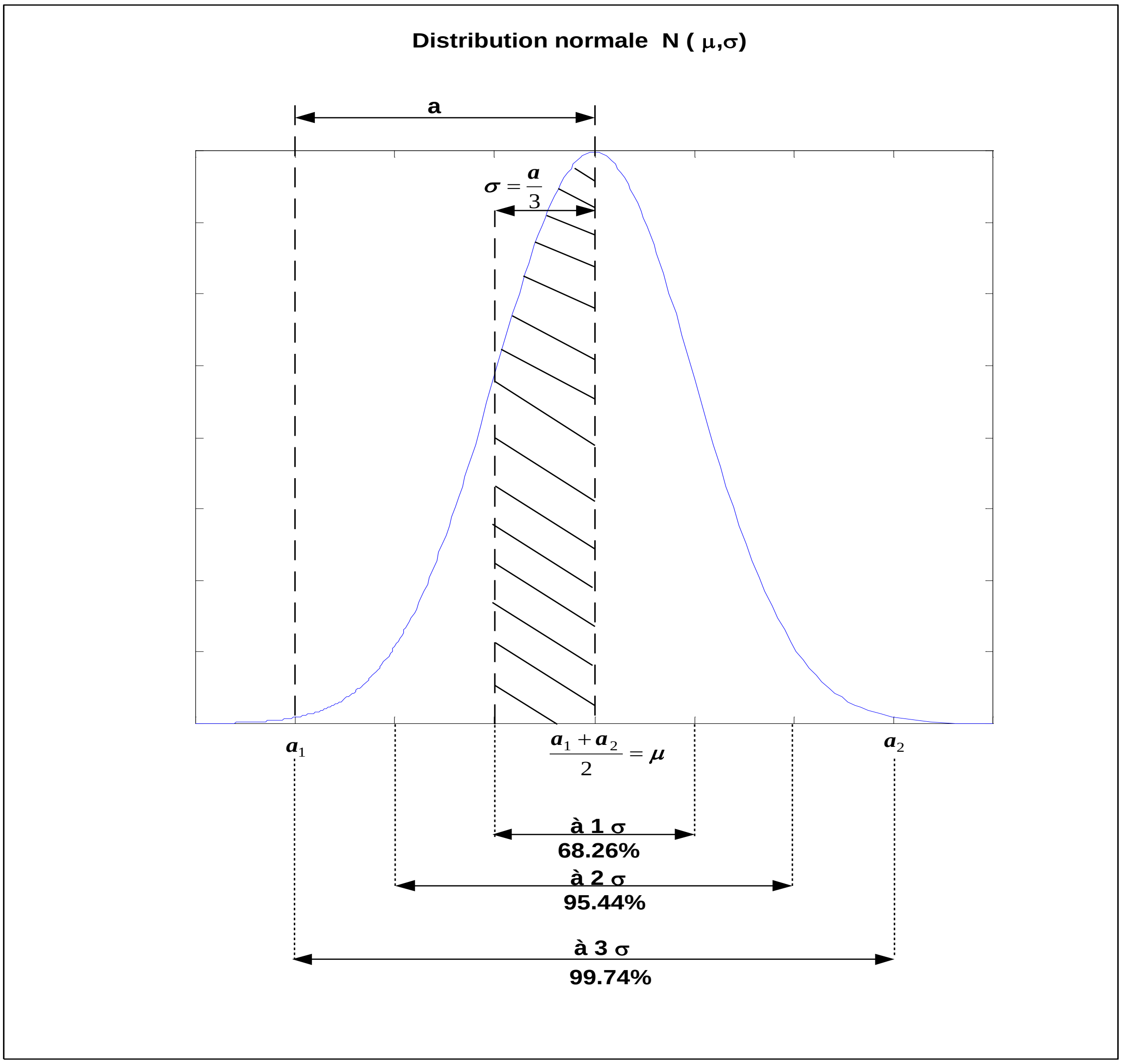
$$Var(X) = \left(\frac{a_2-a_1}{2\sqrt{6}}\right)^2$$

$$Var(X) = \left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2$$

5.3 Loi Normale N (μ, σ)

Supposons que X soit décrit par une loi de probabilité Normale N(μ, σ) dont la densité de probabilité est définie par :

$$p(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad pour \quad -\infty < x < +\infty$$



Pour une loi Normale, avec 3σ, la demi-largeur de l'intervalle est recouverte.

Donc si notre intervalle est défini par [a1, a2] et que notre variable S suit sur cet intervalle une loi normale, alors :

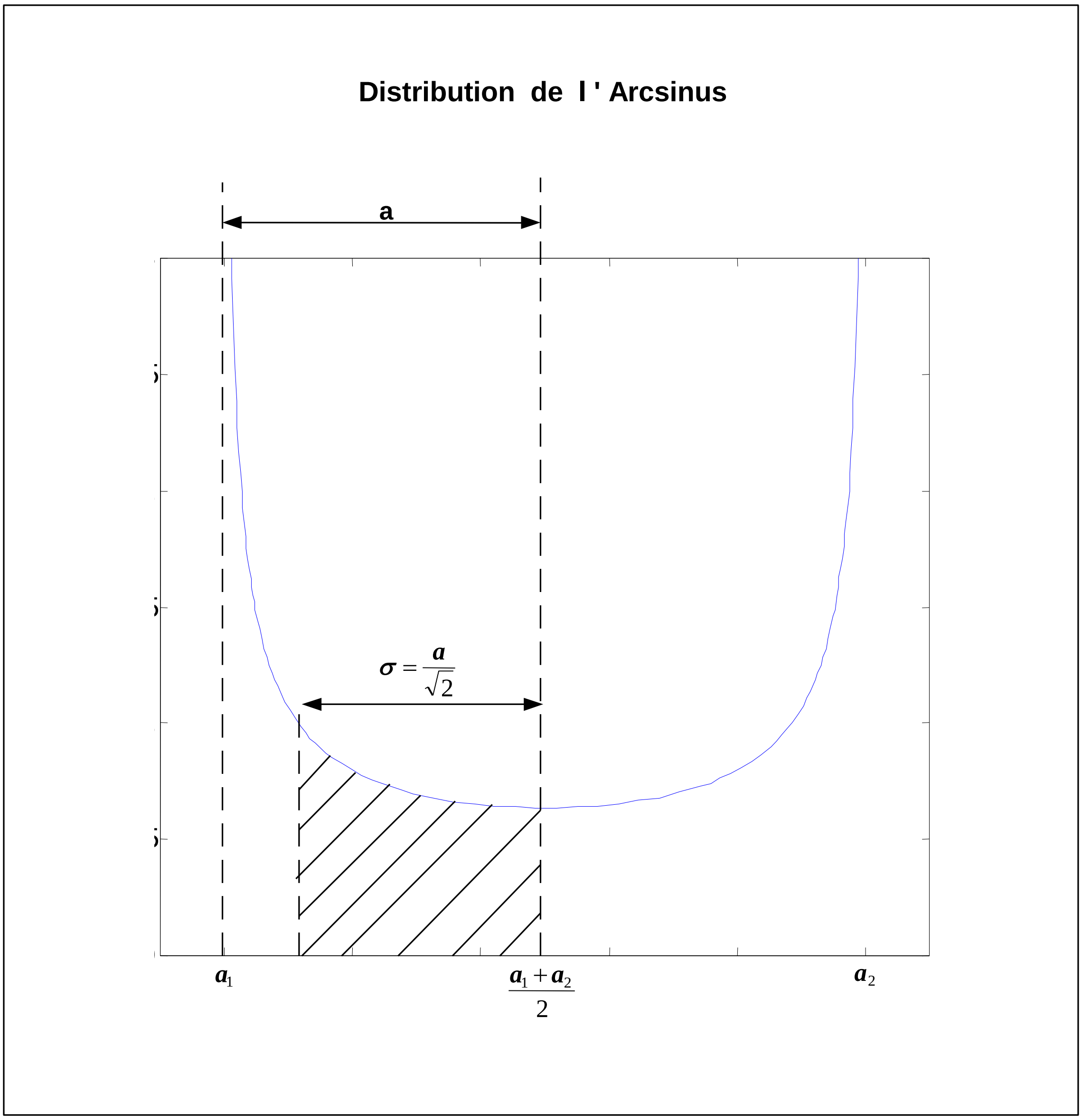
$$E(S) = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\sigma(S) = \frac{a}{3} \quad avec\ a = \frac{a_2 - a_1}{2}$$

5.4 Loi de l'Arcsinus

Supposons que X soit décrit par une loi de probabilité de l'Arcsinus dont la densité de probabilité est définie par :

$$p(X) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \quad pour\ 0 < x < 1$$



La loi de l'Arcsinus provient d'une loi Bêta B(α, β) où α = ½ et β = ½

Le terme de loi de l'Arcsinus vient du fait que la fonction de répartition est égale à :

$$F(x) = \frac{2}{\pi} Arcsinus\left(\sqrt{x}\right) \quad avec\ F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u)du$$

Une variable aléatoire Y décrite par une loi Bêta admet une densité de probabilité de la forme:

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\ pour\ 0 < y < 1$$

$$avec\ \Gamma(\varepsilon) = \int_{0}^{+\infty} t^{\varepsilon-1}\, e^{-t}dt \quad et\ \Gamma(\varepsilon+1) = \varepsilon\Gamma(\varepsilon)$$

$$f(y) = 0 \quad pour\ \ y < 0\ \ et\ y > 1$$

$$avec\ \Gamma(1) = 1\ \ et\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Par définition de la variance : Var(X) = E(X^2) – [E(X)]^2

Calculons E(X)

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} x x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+1)}$$

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Calculons E(X^2)

$$E(X^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^2 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(3)}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{\pi}}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{3}{8}$$

La variance Var(X) peut être calculée

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{8}$$

L'écart-type est

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Pour une loi de l'Arcsinus sur l'intervalle [0, 1], l'espérance mathématique correspond au milieu de l'intervalle [0, 1] et l'écart-type correspond à :

$$\frac{largeur\ de\ l'intervalle[0,1]}{2\sqrt{2}}$$

Donc si notre intervalle est définie par [a1, a2] et que notre variable S suit sur cet intervalle une loi de l'Arcsinus, alors :

$$E(S) = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\sigma(S) = \frac{a}{\sqrt{2}}\ \ avec\ a = \frac{a_2 - a_1}{2}$$

6 Bibliographie

Le tableau ci-dessous référence les sources externes associés à l'utilisation de ce document.

[1]	**ISO/CEI Guide 98-1 :2009 : Introduction à l'expression de l'incertitude de mesure**
[2]	**ISO/CEI Guide 98-3 :2009 : Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure**
[3]	Protassov K., **Probabilités et Incertitudes dans l'analyse des données expérimentales**, 1999, Collection Grenoble Université (ISBN 2 7061 0861 4)
[4]	Priel M., **Incertitudes de mesure et tolérances**, Techniques de l'Ingénieur R285
[5]	Neuilly M., **Erreurs de mesure**, Techniques de l'ingénieur R280